

The geometric theory of teleportation (Теория геометрической телепортации)

FRANZ HERMANN

franz.h-n@yandex.ru

It is known that it is impossible to leave the hyperbolic geometry induced by the absolute as a second-order curve on the projective real plane. However, using the properties and methods of some imaginary hyperbolic geometry, it is possible to "teleport" a straight line segment located on a plane in hyperbolic geometry to another part of the same plane where the elliptic geometry is induced. Read about this in our article.

(Известно, что покинуть гиперболическую геометрию, индуцированную абсолютном в виде кривой второго порядка на проективной действительной плоскости, невозможно. Однако, используя свойства и методы некоторой мнимой гиперболической геометрии, есть возможность «телепортировать» отрезок прямой, находящийся на плоскости в гиперболической геометрии, в другую часть этой же плоскости, где индуцирована эллиптическая геометрия. Об этом читайте в нашей статье).

Франц Герман

Теория геометрической телепортации.

Известно [1], что на действительной проективной плоскости RP^2 ввести понятие метрики (расстояния между двумя точками) можно, например, при помощи метода Кэли-Клейна (вообще этим методом можно индуцировать многие геометрии [6]). Выбрав на RP^2 кривую второго порядка в качестве инварианта проективного преобразования плоскости (абсолюта), индуцируется сразу две геометрии. Внутри абсолюта получаются гиперболические геометрии (Лобачевского др.), снаружи – эллиптические геометрии (Римана и др.) (Рис. 1).

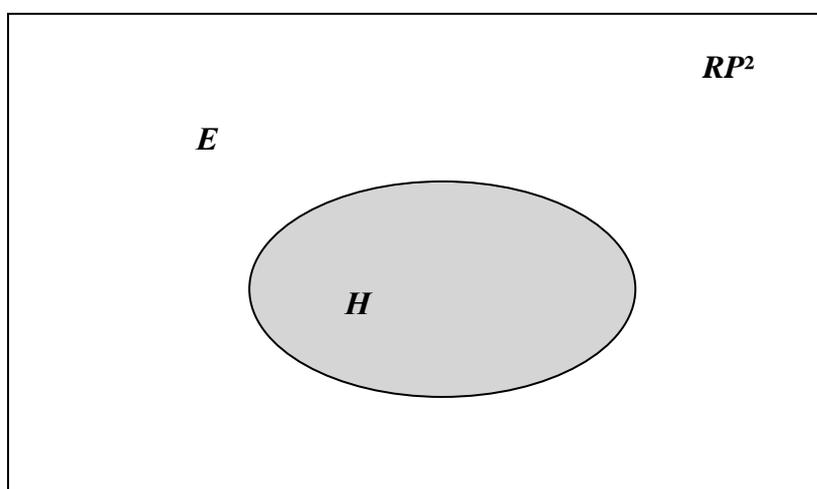


Рис. 1

Буквой H будем обозначать гиперболическую метрику, а буквой E – эллиптическую.

При этом выбраться из абсолюта, т. е. из одной геометрии в другую, перемещаясь по плоскости невозможно, точно также как и проникнуть в абсолют извне [1].

Зададим абсолют простейшим уравнением действительной кривой второго порядка $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ (уравнения всех линий второго порядка есть, например, в [9], стр. 386). Введём понятие квазискалярного произведения двух точек, принадлежащих абсолюту, по формуле:

$$x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Также введём понятие квазискалярного произведения двух точек на проективной плоскости аналогично квазискалярному произведению для точек на абсолютe.

Рассмотрим две точки на проективной плоскости X и Y . Не нарушая общности, однородные координаты точек можно задать следующим образом: $X(x_1 : x_2 : 1)$ и $Y(y_1 : y_2 : 1)$. Тогда квазискалярное произведение двух точек X и Y будет иметь вид, согласно принятой выше формуле:

$$X \circ Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 + 1$$

Аналогично введём также понятие собственного квазискалярного произведения точки:

$$X \circ X = x_1^2 - x_2^2 + 1.$$

В дальнейшем для краткости записи квазискалярные произведения будем обозначать следующим образом: $X \circ X = a$, $Y \circ Y = b$, $X \circ Y = c$. В этих обозначениях метрики, полученных геометрий, будут иметь формулы [1]:

$$H = \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}} \right) \quad (1)$$

$$E = \arccos \left(\frac{c'}{\sqrt{a'b'}} \right) \quad (2)$$

Здесь все величины a , b , c должны иметь отрицательные значения, т. к. точки X и Y находятся внутри абсолюта ([11], стр. 263) и $c^2 > bc$ ([10], стр. 323) а величины a' , b' и c' - положительные, причём, в силу области определения функции арккосинуса должно быть $c' < \sqrt{a'b'}$. Т. о. квазискалярные произведения накладывают ограничения на выбор точек для данного абсолюта.

Покажем, что вводя некоторую псевдогиперболическую (мнимую) геометрию с метрикой \overline{H} , всё таки можно «телепортировать» отрезок прямой из области внутри абсолюта во внешнюю область на RP^2 .

Введём обозначение: $H = \ln(h)$.

Новую псевдогиперболическую метрику будем строить следующим параметрическим образом. Пусть

$$\overline{H} = \ln \left(\frac{c^2 + k^2}{(c' + i \cdot k)^2} \right), \quad (3)$$

здесь $c^2 + k^2 = h$ и $c' = |\sqrt{c^2}|$.

Выражение (3) можем записать и так:

$$\overline{H} = \ln\left(\frac{c' - i \cdot k}{c' + i \cdot k}\right) \quad (4)$$

Рассмотрим две точки $X'(x'_1 : x'_2 : 1)$ и $Y'(y'_1 : y'_2 : 1)$ из внешней области абсолюта. Первую точку возьмём таким образом, чтобы $X' \circ X' = a' > 0$. Тогда координаты второй точки можно найти решая уравнение:

$$\begin{cases} (y'_1)^2 - (y'_2)^2 = \frac{c^2 + k^2}{a'} - 1, \\ x'_1 y'_1 - x'_2 y'_2 = c' - 1 \end{cases} \quad (5)$$

здесь $\frac{c^2 + k^2}{a'} = b'$. Т. к. координаты x'_1 и x'_2 известны, то система (5) является системой двух уравнений с двумя неизвестными. Решая (5) находим y'_1 и y'_2 .

На этом можно было бы закончить наше исследование, т. к. мы построили отрезок во внешней части абсолюта, соответствующий заданному отрезку внутри абсолюта. Но хотелось бы определить уравнение, связывающее метрики E и H .

Теперь можем записать параметр k в таком виде:

$$k^2 = a' b' - c^2 = -(c^2 - a' b'), \quad k = i \sqrt{c^2 - a' b'}.$$

С учётом того, что $c^2 = (c')^2$ и известна формула для параметра k , выражение (4) принимает вид:

$$\overline{H} = \ln\left(\frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a' b'}}{c' - \sqrt{(c')^2 - a' b'}}\right) \quad (6)$$

Т. о. выражение (2) и (6) являются функциями одних и тех же трёх параметров. Заметим, что из $k = i \sqrt{(c')^2 - a' b'}$ и $c' < \sqrt{a' b'}$ величина k должна быть отрицательна. Теперь найдём связь между выражениями (2) и (6).

Из выражения (2) можем записать:

$$\cos(E) = \frac{c'}{\sqrt{a' b'}}, \quad (7)$$

$$\text{тогда } \sin(E) = \sqrt{1 - \cos^2(E)} = \sqrt{1 - \left(\frac{c'}{\sqrt{a' b'}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a' b' - (c')^2}{a' b'}}$$

$$\text{или } -i \cdot \sin(E) = \frac{\sqrt{(c')^2 - a' b'}}{\sqrt{a' b'}}.$$

Теперь вычислим выражения $\cos(E) - i \cdot \sin(E)$ и $\cos(E) + i \cdot \sin(E)$.
Получаем:

$$\cos(E) - i \cdot \sin(E) = \frac{c' + \sqrt{(c')^2 - a' b'}}{\sqrt{a' b'}}$$

$$\cos(E) + i \cdot \sin(E) = \frac{c' - \sqrt{(c')^2 - a' b'}}{\sqrt{a' b'}}.$$

Разделив первое выражение на второе мы получаем экспоненциальное выражение $e^{\bar{H}}$ или более подробно:

$$\frac{\cos(E) - i \cdot \sin(E)}{\cos(E) + i \cdot \sin(E)} = \frac{(\cos(E) - i \cdot \sin(E)) \cdot (\cos(E) - i \cdot \sin(E))}{(\cos(E) + i \cdot \sin(E)) \cdot (\cos(E) - i \cdot \sin(E))} = \cos(2E) - i \cdot \sin(2E).$$

Преобразуем последнее выражение с использованием формулы Эйлера $e^{iw} = \cos(w) + i \cdot \sin(w)$. Тогда

$$\cos(2E) - i \cdot \sin(2E) = -\exp(i \cdot (\pi - 2E)). \quad (8)$$

Откуда можем записать: $\exp(\bar{H}) = -\exp(i \cdot (\pi - 2E)) = -\frac{\exp(i \cdot \pi)}{\exp(i \cdot 2E)}$. С учётом

того, что $\exp(i \cdot \pi) = -1$ получаем $\exp(\bar{H}) = \frac{1}{\exp(i \cdot 2E)}$ или окончательно:
 $\exp(\bar{H}) \cdot \exp(i \cdot 2E) = \exp(\bar{H} + i \cdot 2E) = 1.$

Последнее выражение можно переписать таким образом:

$$\frac{i}{2} \bar{H} = E \quad (9)$$

Из выражения (3) имеем: $\bar{H} = \ln(c^2 + k^2) - 2\ln(c' + i \cdot k) = H - 2\ln(c' + i \cdot k).$

Мы помним, что $k = i\sqrt{c^2 - a' b'}$ и $a' b' = c^2 + k^2 = h = e^H$. Теперь можем записать:

$$E(x'_1, x'_2) = \frac{i}{2} \cdot H(x_1, x_2, y_1, y_2) - i \cdot \ln\left(\left|\sqrt{c^2}\right| - \sqrt{c^2 - e^H}\right) \quad (10)$$

Последнее уравнение будем называть **уравнением геометрической телепортации**. Т. о. задавая координаты двух произвольных точек X и Y

из области внутри абсолюта можно вычислить эллиптическую метрику. Задавая точку X' в эллиптическом пространстве (вне абсолюта) и используя формулу (7) вычисляем значение квазискалярного произведения b' . И затем, решая систему уравнений :

$$\begin{cases} (y'_1)^2 - (y'_2)^2 = b' - 1 \\ a_1 y'_1 - a_2 y'_2 = c' - 1 \end{cases}, \quad (11)$$

находим координаты точки Y' . Здесь $x'_1 = a_1$, $x'_2 = a_2$ - координаты точки X' .

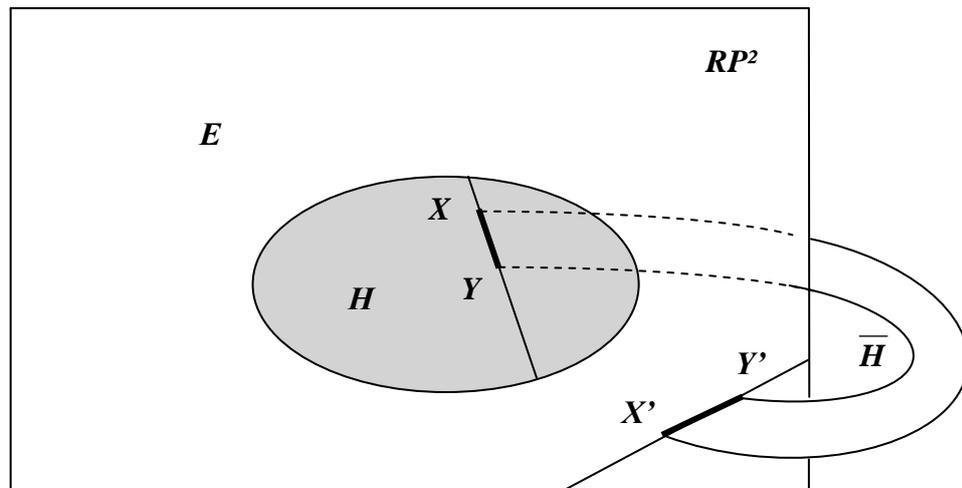


Рис. 2

Две точки определяют прямую. По сути дела, мы телепортировали прямую из гиперболической геометрии в эллиптическую посредством некоторой промежуточной псевдогиперболической геометрии с метрикой \overline{H} (Рис. 2). Заметим, что метрика \overline{H} является чисто мнимой величиной (см. [14], стр. 58 и [7], стр.150).

Обратный путь гораздо проще в плане вычислений координат точек. Задавая две точки в эллиптическом пространстве, находим квазискалярные произведения a' , b' и c' . Мы помним, что $c = -c'$, $h = a'b'$, и $h = \frac{c + \sqrt{c^2 - ab}}{c - \sqrt{c^2 - ab}}$.

Задавая некоторую точку $X(a_1 : a_2 : 1)$ в гиперболическом пространстве (внутри абсолюта) можно вычислить b по формуле:

$$b = \frac{4c^2 h}{a(h+1)^2}. \quad (12)$$

При этом мы должны помнить, что выбор точки X должен осуществляться таким образом, чтобы квазискалярное произведение a было величиной отрицательной. Зная b , вычисляем координаты второй точки Y из системы уравнений:

$$\begin{cases} (y_1)^2 - (y_2)^2 = b - 1 \\ a_1 y_1 - a_2 y_2 = c - 1 \end{cases} \quad (13)$$

Анализируя решения систем (11) и (13) находим дополнительные ограничения на выбор координат точек соответственно для X' и X . В первом случае если $b' < 1$, то должно выполняться условие $|a'_2| > |a'_1|$. Во втором случае при любом b должно выполняться условие $|a_2| > |a_1|$.

Используя (12) и параметр k можно получить явную формулу, связывающую в рамках нашего исследования гиперболическую и эллиптическую метрики:

$$\cos^2(E) + \frac{k^2}{e^H} = 1, \quad (14)$$

здесь $E = E(a', b', c')$, а $H = H(a, b, c)$.

Теперь надо пояснить: откуда появилась необходимость такого исследования.

Рассмотрим сферу и взятую на ней окружность (Рис. 3).

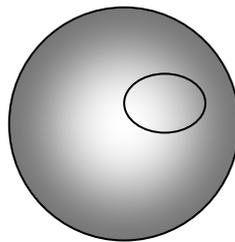


Рис. 3

Интуитивно мы понимаем, что называется внутренней областью окружности на сфере, а что наружной.

Предположим, что окружность равномерно увеличивается (натягивается на сферу). В какойто то момент наша окружность достигнет размеров большого круга взятой сферы. А потом снова начнёт уменьшаться. Получается, что в этом случае внутренняя область окружности и наружная поменялись местами. Дело в том, что сфера с отождествлёнными диаметрально противоположными точками является моделью проективной плоскости ([8], стр. 503, кстати сказать, такую же модель используют и для описания эллиптического пространства [4], стр.

270, а общее определение проективного пространства можно найти в [5], стр. 81). Выходит, что индуцированные геометрии на модели проективной плоскости могут меняться ролями. Другими словами, должна существовать аналитическая связь между метриками этих геометрий (аналитическое выражение метрики для проективной плоскости впервые было получено Лагерром ([12], стр. 286, а полный вид формулы Лагерра дан в [13], стр.300).

Такие рассуждения и явились побудительным мотивом к настоящему исследованию.

В заключение рассмотрим два тора (Рис. 4)

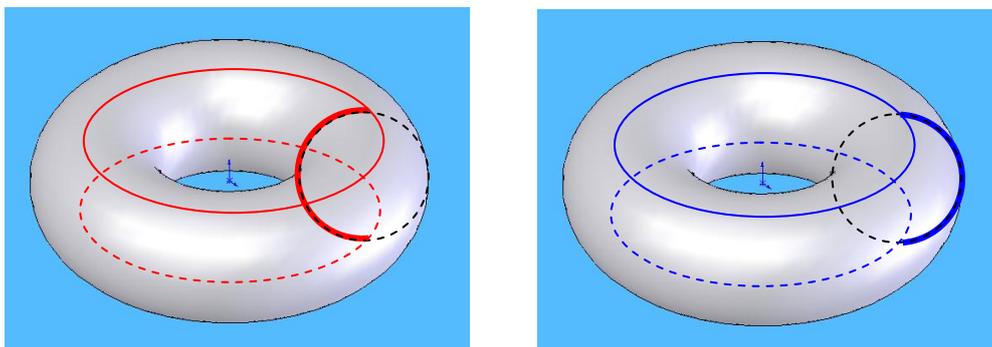


Рис. 4

Известно (см. например [15] стр. 448), что точки внутренней части тора, заметаемой красной полуокружностью при её вращении вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии тора, являются гиперболическими. Т. е. геометрия этой части тора является гиперболической (окружности, заметаемые точками на концах красной полуокружности исключаются, т. к точки этих окружностей являются параболическими).

Внешняя часть тора, заметаемая синей полуокружностью без конечных точек, имеет эллиптическую геометрию.

Можем пофантазировать и предположить, что именно так будут выглядеть в будущем модели телепортационных камер, переносящие предметы с внутренней части тора, показанного на Рис. 4 слева, на внешнюю часть правого тора и наоборот.

Кстати, существует модель Розенфельда ([3], стр. 341) проективной плоскости в виде цилиндра с отождествлёнными центрально симметричными точками. Остаётся придумать только, как такой цилиндр превратить в тор.

Литература

1. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «От проективной геометрии – к неевклидовой», М., «Просвещение», 1979
2. Б. А. Розенфельд, «Неевклидовы пространства», М., «НАУКА», 1969
3. Б. А. Розенфельд, «Многомерные пространства», М., «НАУКА», 1966
4. Б. А. Розенфельд, «История ннеевклидовой геометрии», М., «НАУКА», 1976
5. А. П. Норден, «Пространства аффинной связности», М., «НАУКА», 1976
6. И. М. Яглом, «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия», М., «НАУКА», 1969
7. И. П. Егоров, «Геометрия», М., «Просвещение», 1979
8. Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн, «Линейная алгебра и многомерная геометрия», М., «НАУКА», 1974
9. Н. В. Ефимов, «Высшая геометрия», М., «НАУКА», 1971
10. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия» Т. 2, М., «Просвещение», 1987
11. Я. П. Понарин, «Аффинная и проективная геометрия», М., «МЦНМО», 2009
12. Г. Буземан, П. Келли, «Проективная геометрия и проективные метрики», М., издательство «ИЛ», 1957
13. Н. А. Глаголев, «Проективная геометрия», М., «Высшая школа», 1963
14. К. У. Шахно, «Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления», Минск, «Высшая школа», 1975
15. А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, «Геометрия», М., «НАУКА», 1990