CALCUL DES SOIRÉES DE HAUTEURS EGALES PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

par

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ancien Ingénieur Géographe Général
à l'Office de la Topographie et du Cadastre

RÉSUMÉ :

Dans cet article, nous proposons d'écrire les équations de calculs de la latitude et la longitude astronomiques par la méthode de hauteurs égales et de les résoudre par les moindres carrés et en calculant les écarts-types des inconnues.

Mots clés : Triangle sphérique, hauteurs égales, moindres carrés.

Table des matières

1. Relation différentielle fondamentale

Soit le triangle sphérique PES où P est le pôle nord, E l'étoile et S la station astronomique, et les éléments suivants :
- z la distance zénithale = 30°00′00",
- δ la déclinaison de l'étoile observée,
- φ la latitude de la station,
- AH l'angle horaire de l'étoile et A son azimut au moment de l'observation.

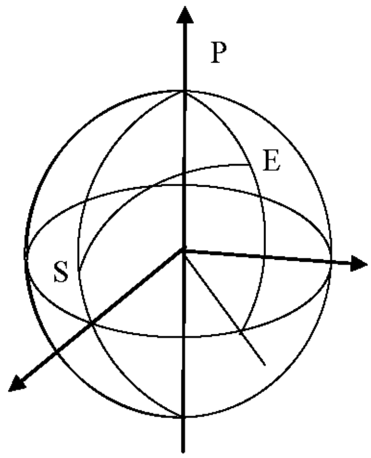

FIGURE 1. Le triangle sphérique

En appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au triangle EPS de côtés z, $\pi/2-\varphi$, $\pi/2-\delta$, on obtient :

$$cosz = sin\varphi sin\delta + cos\varphi cos\delta cosAH \tag{1}$$

En différentiant l'équation (1), on obtient :

$$-sinzdz = (sin\delta cos\varphi - sin\varphi cos\delta cosAH)d\varphi + (sin\varphi cos\delta - cos\varphi sin\delta cosAH)d\delta$$
$$-cos\varphi cos\delta sinAH.dAH \tag{2}$$

or d'après la formule en sinus cosinus :

$$sin\delta cos\varphi - sin\varphi cos\delta cosAH = sinzcosA$$

L'équation (2) devient :

$$-sinzdz = sinzcosAd\varphi + (sin\varphi cos\delta - cos\varphi sin\delta cosAH)d\delta - cos\varphi cos\delta sinAH.dAH \tag{3}$$

La déclinaison δ de l'étoile est connue avec précision au moment de l'observation, par suite $d\delta = 0$, la formule des sinus donne :

$$\frac{sin(-AH)}{sinz} = \frac{sinA}{cos\delta} \Longrightarrow sinzsinA = -cos\delta sinAH \tag{4}$$

En remplaçant dans (3) $d\delta$ par 0 et $cos\delta sinAH$ par $-sinzsinA$, on obtient :

$$-sinzdz = sinzcosAd\varphi + sinzsinAdAH \tag{5}$$

ou encore :

(6) $$dz = -cosAd\varphi - sinAcos\varphi dAH$$

Or $z \approx 30°$ donc $sinz \neq 0$, or AH est lié à la longitude λ de la station par :

(7) $$AH = HSG_{0TU} + kTU + \lambda - \alpha$$

où :

- HSG_{0TU} : l'heure sidérale de Greenwich à $0h\,TU$ le jour de l'observation,

- α : l'ascension droite de l'étoile,

- $k = \frac{366.2422}{365.2422}$ le coefficient pour transformer le temps moyen TU en temps sidéral TS.

Par suite :

(8) $$dAH = d\lambda$$

en différentiant (7), d'où la relation différentielle fondamentale :

(9) $$dz = -cosAd\varphi - sinAcos\varphi d\lambda$$

avec A l'azimut de l'étoile calculé à partir de (4) par :

$$sinA = \frac{-cos\delta sinAH}{sinz}$$

2. Relations d'observations en moindres carrés

A l'aide des valeurs approchées λ_0 et φ_0, on détermine les coordonnées définitives φ et λ par :

(10) $$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + d\varphi \\ \lambda = \lambda_0 + d\lambda \end{cases}$$

où $d\varphi, d\lambda$ vont être calculées à partir de l'équation (9) par la méthode des moindres carrés.

Dans l'équation (9), on a :

$$dz = z_{\text{observé}} - z_{\text{calculé}}$$

ou encore :

(11) $$dz = z_{\text{observé réellement}} - z_{\text{calculé approché}}$$

Introduisons dans (11) :

(12) $$z_1 = z_{\text{obs observé}} = 30°00'00" + C$$

où C la somme des corrections des épaisseurs de contacts des niveaux et de la réfraction atmosphérique, on obtient :

(13)
$$dz = z_{\text{observé réellement}} - z_{1\text{observé approché}} + z_{1\text{observé approché}} - z_{\text{calculé approché}}$$

Posons :

(14)
$$\rho = z_{\text{observé réellement}} - z_{\text{observé approché}}$$

ρ est une constante aux résidus près au cours de l'observation de l'ensemble des étoiles d'une soirée astronomique.

Soit :

(15)
$$dz'_i = \left(z_{1\text{observé approché}} - z_{\text{calculé approché}}\right)_{\text{étoile}\, i}$$

L'équation (13) devient :

(16)
$$dz_i = \rho + dz'_i = -cosA_i d\varphi - sinA_i cos\varphi . d\lambda$$

D'où la relation d'observations par les moindres carrés :

(17)
$$\boxed{cosA_i d\varphi + sinA_i cos\varphi d\lambda + \rho + dz'_i = v_i; \quad i = 1,2,...,n}$$

où v_i est le résidu et n est le nombre des étoiles observées de la soirée.

3. Résolution directe par les Moindres Carrés

Posons :

(18)
$$x = d\varphi; \quad y = cos\varphi d\lambda$$

L'équation (17) s'écrit :

(19)
$$\boxed{xcosA_i + ysinA_i + \rho + dz'_i = v_i; \quad i = 1,2,...,n}$$

On résout le système (19) par la condition $\sum_i v_i^2$ minimum, d'où :

(20)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i v_i^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sum_i v_i^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\sum_i v_i^2\right) = 0 \end{cases}$$

La troisième équation de (20) donne facilement ρ en fonction de x et de y à savoir :

(21)
$$\rho = \frac{-1}{n}\sum_i \left(xcosA_i + ysinA_i + dz_i\right) = -\frac{x\sum_i cosA_i + y\sum_i sinA_i + \sum_i dz_i}{n}$$

On remplace ρ en fonction de x et de y dans les deux premières équations de (20), on obtient un système linéaire aux inconnues x, y, soit :

$$\left\{\begin{array}{l} px+qy=u \\ qx+ry=w \end{array}\right. \tag{22}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} p=\sum_i^n cos^2 A_i - \dfrac{\left(\sum_i^n cos A_i\right)^2}{n} \\ q=\sum_i^n cos A_i sin A_i - \dfrac{\left(\sum_i^n sin A_i\right)\left(\sum_i^n cos A_i\right)}{n} \\ u=\dfrac{\left(\sum_i^n cos A_i\right)\left(\sum_i^n dz_i\right)}{n} - \sum_i^n cos A_i dz_i \\ w=\dfrac{\left(\sum_i^n sin A_i\right)\left(\sum_i^n dz_i\right)}{n} - \sum_i^n sin A_i dz_i \\ r=\sum_i^n sin^2 A_i - \left(\dfrac{\sum_i^n sin A_i}{n}\right)^2 \end{array}\right. \tag{23}$$

A partir de x et y déterminés par (22), on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} d\varphi = x \\ d\lambda = \dfrac{y}{cos\varphi} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi=\varphi_0+d\varphi \\ \lambda=\lambda_0+d\lambda \end{array}\right. \tag{24}$$

L'inconnue auxiliaire ρ est calculée par (21). ρ représente le rayon, du cercle centré sur (φ, λ) et tangent au mieux aux droites de hauteurs par la détermination par la méthode graphique.

4. Résolution Matricielle

On peut écrire également le système des équations (9) sous forme matricielle :

$$B.X+L=V \tag{25}$$

où :

$$B=\begin{pmatrix} cos A_1 & sin A_1 & 1 \\ cos A_2 & sin A_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ cos A_n & sin A_n & 1 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \rho \end{pmatrix}; \quad L=\begin{pmatrix} dz'_1 \\ dz'_2 \\ \vdots \\ dz'_n \end{pmatrix}; \quad V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{26}$$

La résolution de l'équation (25) par la méthode des moindres carrés donne le résultat connu :

$$X=-(B^T.B)^{-1}.B^T.L \tag{27}$$

où B^T désigne la matrice transposée de B. Appelons :

$$N = B^T.B \tag{28}$$

C'est une matrice symétrique, inversible, dite matrice normale du système (25).

5. Calculs des écarts-types

5.1. Ecarts-types de chaque soirée. — Une estimation du facteur de la variance unitaire σ_0^2 du système (25) est donnée par :

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_i v_i^2}{n-r} = \frac{V^T.V}{n-r} \tag{29}$$

où n est le nombre des étoiles observées et r le nombre des inconnues. On obtient l'écart-type estimé par :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_i v_i^2}{n-3}} = \sqrt{\frac{V^T.V}{n-3}} \tag{30}$$

Pour trouver les écarts-types de x, y et ρ, on utilise la matrice des variances de x, y et ρ donnée par :

$$Var(x,y,\rho) = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2.(s_{ij}) \tag{31}$$

où (s_{ij}) est l'élément général de la matrice N^{-1}, par suite :

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \sigma_{xx}^2 = \sigma_0^2.s_{11} \\ \sigma_y^2 = \sigma_{yy}^2 = \sigma_0^2.s_{22} \\ \sigma_\rho^2 = \sigma_{\rho\rho}^2 = \sigma_0^2.s_{33} \end{cases} \tag{32}$$

Le calcul de N^{-1} donne :

$$\begin{cases} s_{11} = \dfrac{1}{\sum_i cos^2 A_i}(1+\epsilon_1) \\ s_{22} = \dfrac{1}{\sum_i sin^2 A_i}(1+\epsilon_2) \\ s_{33} = \dfrac{1}{n}(1+\epsilon_3) \end{cases} \tag{33}$$

où ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 sont des quantités négligeables. L'écart-type de x est :

$$\sigma_x = \sigma_0\sqrt{s_{11}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i cos^2 A_i}}(1+\epsilon_1)^{1/2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i cos^2 A_i}}(1+\frac{1}{2}\epsilon_1)$$

En négligeant le terme $\frac{1}{2}\epsilon_1$, on obtient :

$$(34)\qquad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i cos^2 A_i}} \\ \text{de même :} \quad \sigma_y = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i sin^2 A_i}} \\ \sigma_\rho = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Comme $x = d\varphi$ et $y = cos\varphi d\lambda$, on a les écarts-types de déterminations de la latitude φ et de la longitude λ par :

$$(35)\qquad \boxed{\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_i cos^2 A_i}}; \quad \sigma_\lambda = \frac{\sigma_0}{cos\varphi\sqrt{\sum_i sin^2 A_i}}; \quad \sigma_\rho = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

5.2. Ecrts-types de l'ensemble des soirées. — Pour l'ensemble des soirées astronomiques observées, on prendra :

$$(36)\qquad \begin{cases} \varphi_{\text{définitive}} = \dfrac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i} \\ \lambda_{\text{définitive}} = \dfrac{\sum_i n_i \lambda_i}{\sum_i n_i} \end{cases}$$

où n_i le nombre des étoiles de la soirée i.

Pour l'ensemble des soirées, on utilise le théorème suivant :

Variance totale=Moyenne des variances individuelles+Variance de la Moyenne.

On applique le théorème par exemple à la première relation de (36), on obtient :

$$(37)\qquad \sigma^2_{\varphi\, def} = \frac{1}{\sum_i n_i}\left[\frac{\sum_i n_i(\varphi_i - \varphi_{def})^2}{\sum_i n_i - 1}\right] + Var\left(\frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i}\right)$$

or :

$$(38)\qquad Var\left(\frac{\sum_i n_i \varphi_i}{\sum_i n_i}\right) \cong \frac{\sum_i n_i^2 Var(\varphi_i)}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i - 1)}$$

et :

$$(39)\qquad \sigma^2_{\varphi_i} = \frac{n_i Var(\varphi_i)}{n_i - 1}$$

car $\sigma^2_{\varphi_i}$ est la variance estimée de φ_i. D'où :

$$Var\left(\frac{\sum_i n_i\varphi_i}{\sum_i n_i}\right)=\frac{\sum_i n_i(n_i-1)\sigma^2_{\varphi_i}}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i-1)} \tag{40}$$

On obtient donc la variance estimée sur φ définitive par :

$$\sigma^2_{\varphi\,def}=\frac{\sum_i n_i(\varphi_i-\varphi_{def})^2+\sum_i n_i(n_i-1)\sigma^2_{\varphi_i}}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i-1)} \tag{41}$$

Par suite, on a les écarts-types de φ et λ définitifs pour l'ensemble des soirées astronomiques :

$$\boxed{\sigma_{\varphi\,def}=\sqrt{\frac{\sum_i n_i(\varphi_i-\varphi_{def})^2+\sum_i n_i(n_i-1)\sigma^2_{\varphi_i}}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i-1)}}} \tag{42}$$

$$\boxed{\sigma_{\lambda\,def}=\sqrt{\frac{\sum_i n_i(\lambda_i-\lambda_{def})^2+\sum_i n_i(n_i-1)\sigma^2_{\lambda_i}}{(\sum_i n_i)(\sum_i n_i-1)}}} \tag{43}$$

Références

[1] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*, 364 pages. Noor Publishing, ISBN-13 : 978-3330968431; ISBN-10 : 3330968435.

Septembre, 2020

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, ANCIEN INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL, À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE,
Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, 1181 Soukra Raoudha, Tunisie
E-mail : `abenhadjsalem@gmail.com`