

# Аналитическая теория поверхностей Мёбиуса (Analytical Theory of Möbius Surfaces)

Franz Hermann

## Abstract

Все конечно знают, что такое лист Мёбиуса. Берётся прямоугольная полоска бумаги достаточной длины относительно её ширины, перекручивается на 180 градусов и склеивается противоположными (короткими) сторонами. Не путайте с односторонней поверхностью, о которой говорится в учебниках по дифф. геометрии. Склеенный лист Мёбиуса имеет кривизну поверхности равную нулю, как и у евклидовой плоскости. Именно такой лист мёбиуса и является частью поверхности Мёбиуса. Поверхность Мёбиуса является односторонней поверхностью с самопересечением, поэтому сделать модель этой поверхности руками довольно трудно. Поверхность Мёбиуса состоит из четырёх правильных полуконусов, плавно переходящих друг в друга. О построении и исследовании этой поверхности и рассказывается в этой работе.

(Everyone knows of course what a Möbius strip is. Take a rectangular strip of paper of sufficient length relative to its width, twist it 180 degrees and glue it on opposite (short) sides. Not to be confused with the one-sided surface mentioned in the diff. geometry. The glued Möbius strip has a surface curvature equal to zero, as in the Euclidean plane. It is such a Möbius leaf that is part of the Möbius surface. The Möbius surface is a one-sided self-intersecting surface, so it is rather difficult to model this surface by hand. The Möbius surface consists of four regular semi-cones, smoothly merging into each other. The construction and study of this surface is described in this work.)

## Франц Герман

### Аналитическая теория поверхностей Мёбиуса

[franz.h-n@yandex.ru](mailto:franz.h-n@yandex.ru)

#### Содержание

1. Введение	стр. 1
2 Уравнения полуконусов	стр. 4
3. Преобразование ортогональных пространственных координат	стр. 5
4. Топология поверхности	стр. 12
5. Линия самопересечения	стр. 19
<i>Приложение 1.</i> Векторное уравнение конической поверхности	стр. 23
<i>Приложение 2.</i> Преобразование Эйлера	стр. 27
Литература	стр. 29

#### 1. Введение

О поверхности Мёбиуса (пМ) мы уже упоминали в других работах, например [2], стр. 22-30, [14], стр. 218. Напомним в двух словах, что мы имеем в виду, когда говорим о пМ.

Все конечно знают, что такое лист Мёбиуса. Берётся прямоугольная полоска бумаги, достаточной длины относительно её ширины, перекручивается на  $180^\circ$  и склеивается противоположными (короткими) сторонами. Не путайте с односторонней поверхностью, о которой говорится в учебниках по дифф. геометрии, например [1]. Склеенный лист Мёбиуса имеет кривизну поверхности равную нулю, как и у евклидовой плоскости. Именно такой лист мёбиуса и является частью поверхности Мёбиуса.

Известно ([17], стр. 306), что замкнутая односторонняя поверхность должна иметь самопересечение. Поверхность, о которой пойдёт речь в нашем исследовании, не замкнута. Тем не менее, она имеет самопересечение. Вот об этой части (самопересечения) пМ по сути и будет идти речь в нашем повествовании.

Сделать самому пМ довольно трудно. Но если обрезать в развёртке длину некоторых образующих конусов, чтобы при изготовлении избежать

самопересечений поверхности, то частичное подобие модели такой поверхности всё-таки построить можно. Мы даже попытались показать на ней, как выглядит традиционный лист Мёбиуса (красная полоса).

Как известно пМ [2], состоит из 4 полуконусов, плавно переходящих друг в друга (Рис.1).



Рис. 1

В данной работе будет показан вывод уравнений такой поверхности. Для удобства построения нам понадобится каркас - основа, на которой будет строиться вся поверхность.

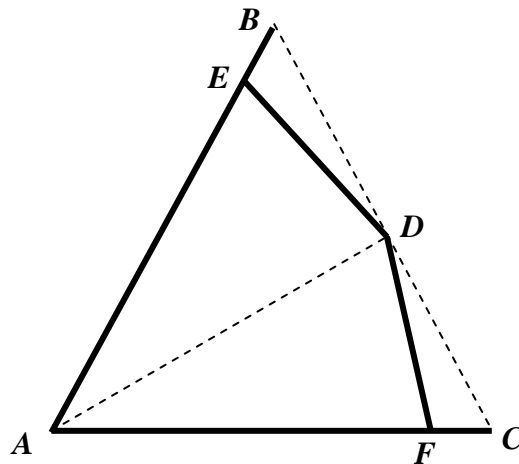


Рис. 2

Что представляет собой каркас. Треугольник  $ABC$  – равносторонний,  $AF = AD = AE$ . Очевидно, что  $BD = DC$ . Жирными отрезками выделены будущие диаметры для оснований полуконусов. Напомним, все четыре полуконуса – являются правильными фигурами (у правильного конуса образующая имеет постоянную длину). Треугольник  $ABC$  принадлежит будущей фигуре. В принципе, можно при построении каркас и не использовать, но с ним легче и понятней.

Теперь немного развернём каркас образующих и покажем каркасы оснований полуконов (полуокружности), которые образуют искомую поверхность (Рис. 3).

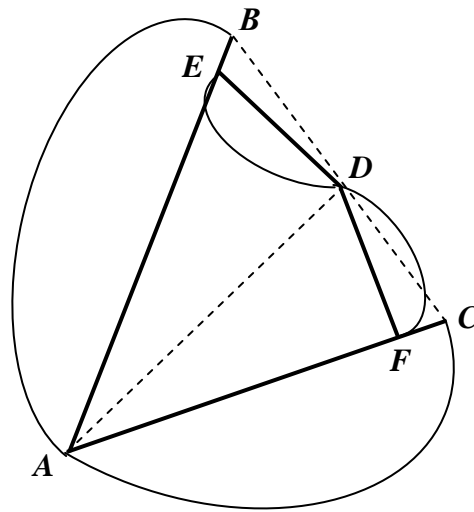


Рис. 3

Полуконус  $ABC$  с вершиной в точке  $B$  лежит над плоскостью рисунка (плоскостью каркаса образующих). Полуконус  $BCA$  с вершиной в точке  $C$  лежит под плоскостью рисунка и его поверхность является продолжением первого полуконуса. У них общая образующая  $BC$ . Поверхность полуконуса  $FAD$  продолжает поверхность второго полуконуса и лежит над плоскостью рисунка. Четвёртый полуконус  $DAE$  лежит под плоскостью рисунка и его поверхность замыкает всю фигуру, плавно переходя в первый полуконус.

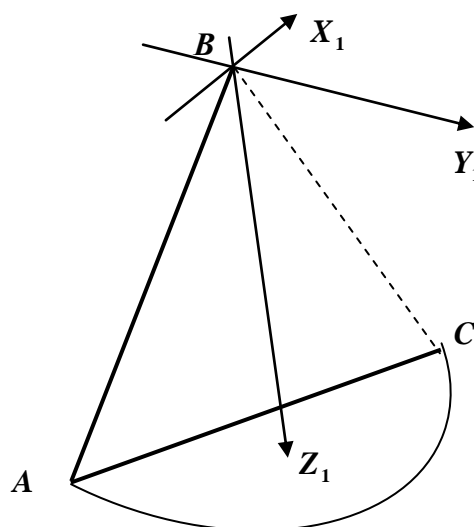


Рис. 4

## 2. Уравнения полуконусов.

Введём систему координат, как показано на Рис. 4. Ось  $Z$  проходит через середину отрезка  $AC$  и точку  $B$ . Тогда уравнение прямого кругового конуса в общем виде будет иметь вид:

$$Z^2 = \frac{c^2}{a^2}(X^2 + Y^2), \quad (1)$$

где  $c = AD$ ,  $a = DC$  (Рис. 3) для первых двух полуконусов и  $c = AD \cdot \cos(15^\circ)$ ,  $a = AD \cdot \sin(15^\circ)$  для третьего и четвёртого полуконусов.

В цилиндрических координатах  $(R, \varphi, Z)$  будем иметь уравнения [8]:

$$R_n = Z_n \cdot \operatorname{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2)$$

где  $\alpha$  - угол при вершине конуса.

Очевидно, что уравнение полуконуса будет выглядеть точно так же только при этом необходимо указывать границы применимости координаты  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Т. о. уравнение первого полуконуса будет иметь вид:  $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot Z_1$ . Второй полуконус имеет точно такое же уравнение. Уравнение третьего полуконуса имеет выражение:  $R_3 = (2 - \sqrt{3}) \cdot Z_3$ . Аналогично, и уравнение четвёртого полуконуса.

Очевидно, что уравнения наших конусов связаны простым коэффициентом:  $k = \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})$ , т. е.  $R_3 = k \cdot R_1$ .

Т. о., пМ можно описать совокупностью таких уравнений и действий:

$$\left[ \begin{array}{l} R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_1 \\ (X_1, Y_1, Z_1) \xrightarrow{A_1} (X_2, Y_2, Z_2), R_1, \\ (X_2, Y_2, Z_2) \xrightarrow{A_2} (X_3, Y_3, Z_3), k \cdot R_1 \\ (X_3, Y_3, Z_3) \xrightarrow{A_3} (X_4, Y_4, Z_4), k \cdot R_1 \end{array} \right. \quad (3)$$

здесь  $A_i$  - матрица перехода от одной координатной системы к другой.

В *Приложении 1* будет показан вывод векторного уравнения полуконуса. Это понадобится нам для того, чтобы показать, как на пМ строится лист Мёбиуса.

### 3. Преобразование ортогональных пространственных координат.

Теперь надо увязать вместе все наши четыре полуконуса.

Каждый из четырёх полуконусов описывается в собственной системе координат. Это можно понять из устройства каркаса (Рис. 2). Помним, что все системы координат одинаково ориентированы, как на Рис. 4.

Будем обозначать ось, перпендикулярную к плоскости рисунка и направленную вверх значком:  $\bullet$ , а направленную вниз -  $\circ$ .

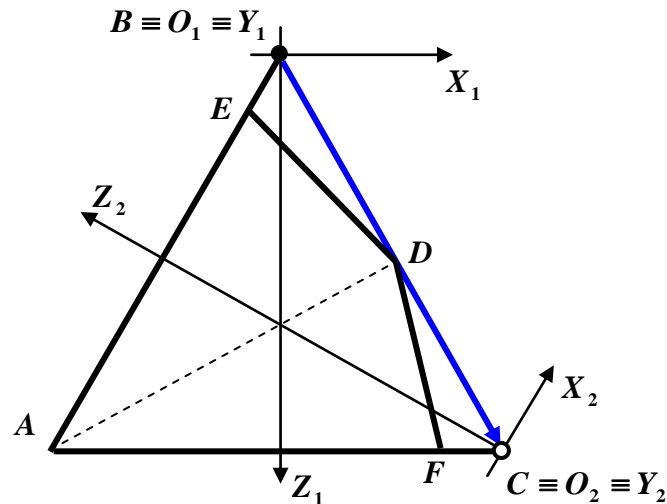


Рис. 5

На Рис. 4 показаны координатные системы первого и второго полуконусов  $X_1, Y_1, Z_1$  и  $X_2, Y_2, Z_2$  соответственно. Вектор  $\vec{s}_{12} = \vec{O_1O_2} = \frac{1}{2}l \cdot (\sqrt{3} \cdot \vec{k} + \vec{i})$  - вектор сдвига от центра (точка  $O_1$ ) одной координатной системы к центру (точка  $O_2$ ) другой. Здесь  $l = AB$  - длина образующей полуконусов (Рис. 3).

Не на долго оставим наше исследование и рассмотрим в общем виде вопрос о преобразовании координат при переходе от одной системы к другой. Условимся считать, что системы координат имеют общее начало (с этой целью мы и ввели вектор сдвига) и одинаково ориентированы.

Можно по-разному строить такие преобразования.

В большинстве учебников по аналитической геометрии рассматривается метод Эйлера. Для построения таких преобразований используется промежуточная ось вращения [4]. Мы будем строить преобразования, используя вращения вокруг уже существующих осей. На наш взгляд такой подход проще для практических расчётов.

Построим матрицу перехода от одной системы координат к другой

Итак, имеем две одинаково ориентированные системы координат:  $X_1, Y_1, Z_1$  и  $X_2, Y_2, Z_2$  (Рис. 5). Начало координат у них общее.

Введём обозначения для дополнительных плоскостей:  $P \equiv X_1 O Y_1$ ,  $Q \equiv Z_2 O X_2$ ,  $R \equiv Z_1 O Y_2$ ,

Для перехода от одной системы координат к другой достаточно трёх поворотов. Сейчас мы в этом убедимся.

Первый поворот осуществляем вокруг оси  $OZ_1$  против часовой стрелки до совмещения оси  $OY_1$  с плоскостью  $R$ . При этом ось  $OY_1$  переходит в ось  $OY^*$ , ось  $OX_1$  - в ось  $OX^*$ . Обозначим угол  $\angle Y_1 O Y^* = \alpha$ .

Второй поворот совершаем вокруг вновь образованной оси  $OX^*$  также против часовой стрелки до совмещения оси  $OY^*$  с осью  $OY_2$ . При этом ось  $OZ_1$  переходит в ось  $OZ^*$ . Обозначим угол  $\angle Y^* O Y_2 = \beta$ .

Третий поворот надо осуществить снова против часовой стрелки вокруг оси  $OY_2$  до совмещения осей  $OX^*$  и  $OZ^*$  с осями  $OX_2$  и  $OZ_2$  соответственно. Обозначим угол  $\angle Z^* O Z_2 = \gamma$ .

Оси промежуточной координатной системы  $(X^*, Y^*, Z^*)$  можно определить через дополнительные плоскости:  $X^* \equiv Q \cap P$ ,  $Y^* \equiv P \cap R$ ,  $Z^* \equiv R \cap Q$ .

Теперь, зная исходную, промежуточную и конечную системы координат можно легко определить углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

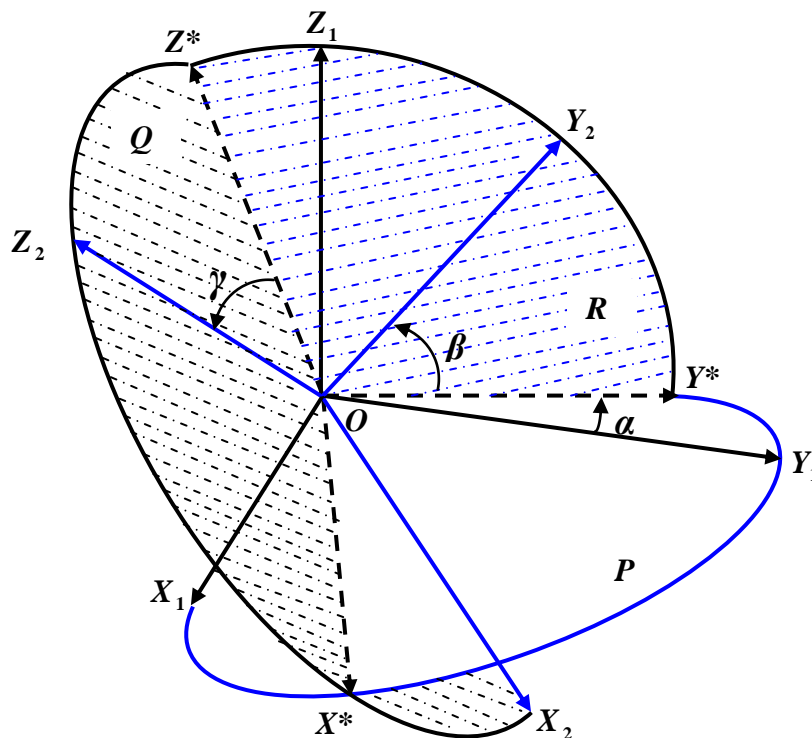


Рис. 6

Теперь опишем наши преобразования (повороты) на математическом языке.

Первый поворот имеет систему преобразований:

$$\begin{cases} X^* = X_1 \cdot \cos(\alpha) + Y_1 \cdot \sin(\alpha) \\ Y^* = -X_1 \cdot \sin(\alpha) + Y_1 \cdot \cos(\alpha) \\ Z_1 = Z_1 \end{cases}$$

Второй поворот соответственно:

$$\begin{cases} Y_2 = Y^* \cdot \cos(\beta) + Z_1 \cdot \sin(\beta) \\ Z^* = -Y^* \cdot \sin(\beta) + Z_1 \cdot \cos(\beta) \\ X^* = X^* \end{cases}$$

Третий поворот:

$$\begin{cases} Z_2 = Z^* \cdot \cos(\gamma) + X^* \cdot \sin(\gamma) \\ X_2 = -Z^* \cdot \sin(\gamma) + X^* \cdot \cos(\gamma) \\ Y_2 = Y_2 \end{cases}$$

Освобождаясь от промежуточных координат  $X^*$ ,  $Y^*$  и  $Z^*$  окончательно получаем:

$$\begin{cases} X_2 = a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot Y_1 + a_{13} \cdot Z_1 \\ Y_2 = a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot Y_1 + a_{23} \cdot Z_1 \\ Z_2 = a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot Y_1 + a_{33} \cdot Z_1 \end{cases} \quad (4)$$

где  $a_{11} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma);$   
 $a_{12} = \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma);$   
 $a_{13} = -\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma);$  (5)

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta); \\ a_{22} &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta); \\ a_{23} &= \sin(\beta); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma); \\ a_{32} &= \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma); \\ a_{33} &= \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

Матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  называется матрицей преобразования

координатной системы.



Вернёмся к нашей задаче и снова посмотрим на Рис. 5. Посредством вектора сдвига можно привести системы  $X_1, Y_1, Z_1$  и  $X_2, Y_2, Z_2$  к общему началу координат  $O_2$ .

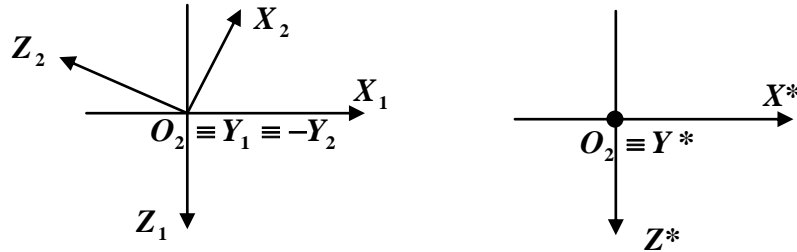


Рис. 7

Здесь плоскость  $Q$  – это плоскость рисунка, плоскость  $P$  проходит через ось  $X_1$  и перпендикулярно плоскости рисунка, плоскость  $R$  проходит через ось  $Z_1$  и тоже перпендикулярно плоскости рисунка. Откуда находим:  $\alpha = \beta = 0^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

Матричные элементы задаются формулами (5), (6), (7). Можем найти матрицу перехода.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразование координат, связывающие уравнения первого и второго полуконусов можно записать в матричной форме:

$$(X_2 \ Y_2 \ Z_2) = A_1 \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Выражение (8) соответствует записи во второй строчке совокупности (3)  $(X_1, Y_1, Z_1) \xrightarrow{A_1} (X_2, Y_2, Z_2)$ .

Для  $(X_2, Y_2, Z_2) \xrightarrow{A_2} (X_3, Y_3, Z_3)$  вектор сдвига будет иметь вид:

$$\vec{s}_{23} = \vec{O_2 O_3} = \frac{1}{2} l \cdot (\sqrt{3} \cdot \vec{k} - \vec{i}), \text{ матрица перехода } A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Для  $(X_3, Y_3, Z_3) \xrightarrow{A_3} (X_4, Y_4, Z_4)$  вектор сдвига  $s_{34} = \mathbf{0}$ , а матрица перехода  $A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

Т. о., мы полностью сделали аналитическое описание пМ.  
Рассмотрим развёртку полученной поверхности (Рис. 8).

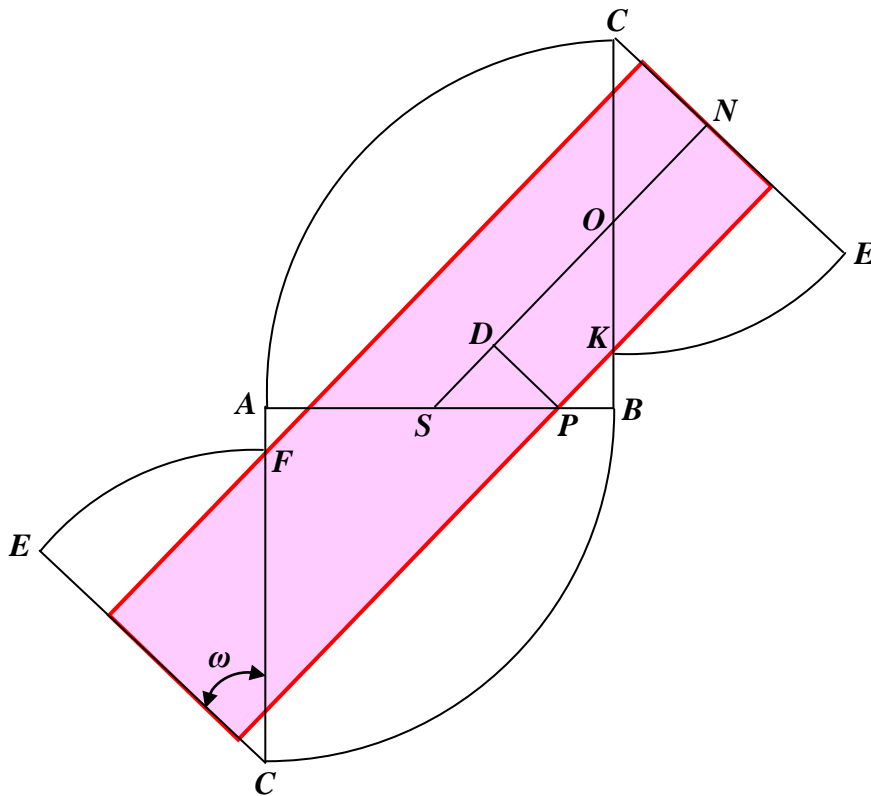


Рис. 8

Красный прямоугольник, вписанный в нашу развёртку, и есть развёртка привычного нам листа Мёбиуса, который мы можем склеить из прямоугольного куска бумаги.

Будем обозначать длину красного прямоугольника через  $L$ , а ширину – через  $H$ . Т. к. рассматриваемый лист Мёбиуса лежит на прямых круговых полукоусах, то его длину и ширину будем называть предельными, а их отношение  $\mu = \frac{L}{H}$  - предельным отношением.

Необходимо сделать уточняющие разъяснения к показанной на Рис. 8 развёртке.

1. Полукокус с углом при вершине  $60^\circ$  разворачивается на плоскости в сектор круга с углом равным  $90^\circ$ .

2. Полукокус с углом при вершине  $30^\circ$  разворачивается на плоскости в сектор круга с углом равным  $\omega = \pi \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ .

Сделаем небольшие дополнительные построения. Прямая  $SN$  является средней линией трапеции, образованной рассечением красного прямоугольника отрезком  $AB$ . Отрезок  $PD \perp SN$ . Очевидно, что  $SN = \frac{L}{2}$ , а  $PD = \frac{H}{2}$ .

Теперь вычислим длину и ширину красного прямоугольника на развёртке. Треугольники  $OSB$  и  $OCN$  – являются прямоугольными и подобными. Поэтому справедливо равенство:  $\frac{ON}{OB} = \frac{OC}{OS}$ .  $SO + ON = \frac{1}{2}L$  или

$ON = \frac{1}{2}L - SO$ ,  $SB = \frac{1}{2}l$  и  $OS = \frac{SB}{\cos(\omega)} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\omega)}l$ .  $OB = BS \cdot \text{Tg}(\omega) = \frac{l}{2} \cdot \text{Tg}(\omega)$ , а

$OC = l - OB = l \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tg}(\omega)\right)$ . Подставим эти значения в полученное равенство

пропорций:  $\frac{\frac{1}{2}L - \frac{1}{2 \cdot \cos(\omega)} \cdot l}{\frac{1}{2}l \cdot \text{Tg}(\omega)} = \frac{l \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tg}(\omega)\right)}{\frac{1}{2 \cdot \cos(\omega)} \cdot l}$ . Упрощая это равенство

находим выражение для длины прямоугольника:

$$L = l \cdot (2 \cdot \sin(\omega) + \cos(\omega)). \quad (9)$$

Из треугольника  $SPD$  можем записать:  $H = 2 \cdot SP \cdot \sin(\omega)$ .  $SP = \frac{1}{2}l - PB$ ,  $PB = \frac{KB}{\text{Tg}(\omega)}$ ,  $KB = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Окончательно получаем:

$$H = l \left( \sin(\omega) - (2 - \sqrt{3}) \cdot \cos(\omega) \right). \quad (10)$$

Как видим, длина и ширина прямоугольника зависят только от длины образующей исходных полукокусов. Можем записать выражение для предельного отношения длины к ширине правильного листа Мёбиуса:

$$\mu = \frac{2 \cdot \sin(\omega) + \cos(\omega)}{\sin(\omega) - (2 - \sqrt{3}) \cdot \cos(\omega)}. \quad (11)$$

При условии, что  $\omega = \pi \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 46,59^\circ$  получаем  $\mu = \frac{L}{H} \approx 3,9462853\dots$

Точные построения показывают, как выглядит геометрия листа Мёбиуса при данных расчётах (ширина умышленно заужена).

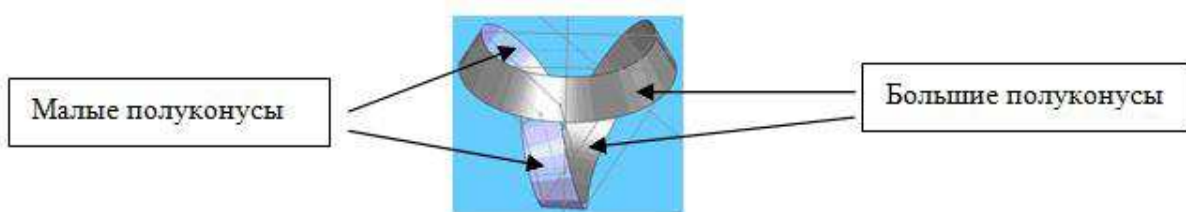


Рис. 9

Если отношение  $\frac{L}{H} < \mu$ , то полукуноусы перестают быть круговыми. Т. е. в основании таких полукуноусов будут лежать эллипсы. В пределе получаем такую вырожденную развёртку:

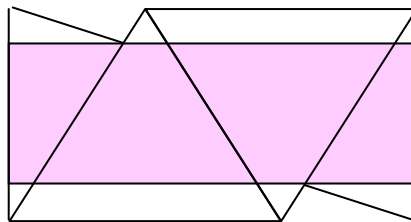


Рис. 10

Не трудно вычислить, что длина и ширина вырожденного листа Мёбиуса будут иметь соответственно формулы:  $L_0 = \frac{3}{2}l$  и

$H_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot l$ . Тогда предельное отношение равно:  $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \approx 2,366\dots$

Если рассматривать ленту Мёбиуса, как самостоятельную одностороннюю поверхность, безотносительно к описываемой выше пМ [10], то предельное значение для отношения длины к ширине в вырожденном случае будет иметь значение  $\mu_0 = \sqrt{3}$ . Это можно проиллюстрировать следующим образом:

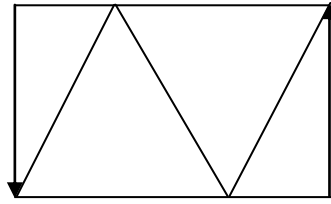


Рис. 11

Здесь треугольник в развёртке листа Мёбиуса (Рис. 11) является равносторонним.

#### 4. Топология поверхности

Перерисуем ещё раз развёртку поверхности Мёбиуса и введём новые обозначения.

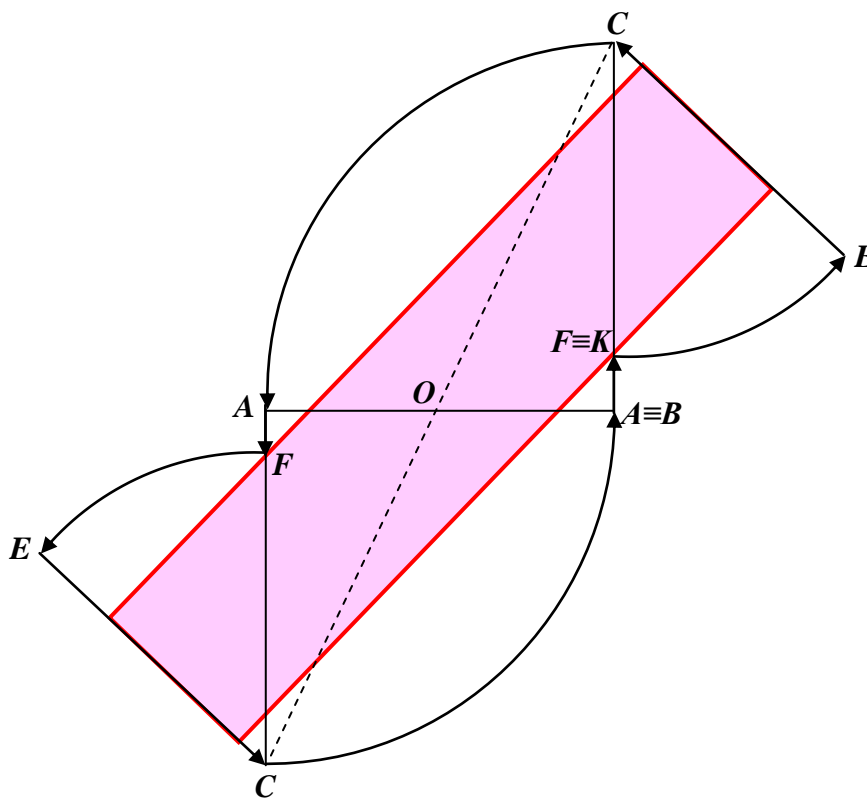


Рис. 12

Не трудно заметить, что данная развёртка топологически эквивалентна прямоугольнику, показанному на Рис. 13.

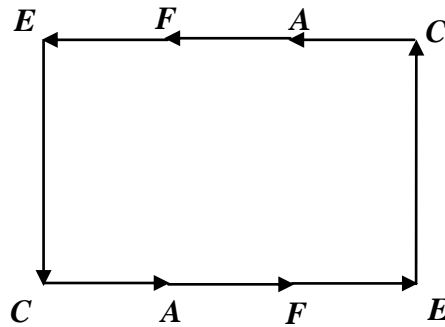


Рис. 13

Именно такое представление имеет топологическая модель проективной плоскости. Другими словами, на Рис. 13 мы видим топологическую схему модели проективной плоскости. Напомним, для получения модели необходимо отождествить противоположные отрезки, имеющие одинаковое буквенное обозначение так, чтобы направления этих отрезков совпали.

Т. о., проделывая аналогичную процедуру отождествления с развёрткой, показанной на Рис. 11, точно так же получаем тополого-геометрическую модель проективной плоскости.

Рассмотрим триангуляцию развёртки, показанной на Рис. 12. Для подсчёта числа Эйлера отрезок  $COC$  можно не учитывать, на триангуляцию он влияния не имеет (т. к. при этом добавляется 1 точка, 2 грани и 3 ребра). Напомним формулу Эйлера:

$$B + \Gamma - P = \chi. \quad (12)$$

Для нашей развёртки имеем: вершин ( $B$ ) - 4 ( $A, F, E, C$ ), граней ( $\Gamma$ ) - 4 (четыре полуконуса), рёбер ( $P$ ) - 7 ( $EC, EF, FA, AC, AB, FC, CK$ ). *Помним, что одинаково обозначенные рёбра отождествляются.* Подставляя данные значения в формулу (12), получаем  $\chi = 1$ . Именно таким числом Эйлера характеризуется проективная плоскость. Т. о., мы получили из пМ ещё одну модель проективной плоскости.

Полученная модель интересна, например, тем, что на данной модели можно ввести понятие максимальной и минимальной длины проективной прямой. Надо заметить, что понятие расстояния в проективной геометрии отсутствует. Проективная геометрия – это не метрическая геометрия. Но мы строили пМ в рамках классической (эвклидовой) геометрии, поэтому можем и говорить о длине прямых, полученной модели.

Ещё раз рассмотрим развёртку на Рис. 11. Исходя из построений не трудно заметить, что она обладает центральной симметрией. Центр симметрии находится в точке  $O$  ( $AO = OB$ ).

Т. о., любая прямая, проходящая через точку  $O$ , будет проективной прямой для модели. Как не трудно заметить, наибольшая прямая будет образована отрезком  $COC$ . Обозначим её длину через  $L_{MAX}$ . Тогда

$$L_{MAX} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + l^2}. \quad (13)$$

Коэффициент 2 в формуле (13) напоминает нам о том, что модель проективной плоскости – это односторонняя поверхность и, чтобы вернуться в исходную точку, двигаясь по прямой, надо пройти это расстояние дважды. Условно говоря, сверху и снизу поверхности.

Очевидно, минимальной прямой модели будет отрезок  $AB$ . Вводя аналогичные обозначения, получаем:

$$L_{MIN} = 2 \cdot l. \quad (14)$$

Логично ввести ещё одну безразмерную константу, как характеристику поверхности Мёбиуса:

$$\delta = \frac{L_{MAX}}{L_{MIN}} \approx 2,3087...$$

Введём понятие сопутствующего многогранника. Сопутствующих многогранников для данной модели два: внешний и внутренний. Что это такое будет понятно из рисунков. Внешний многогранник имеет вид (Рис. 14, слева):

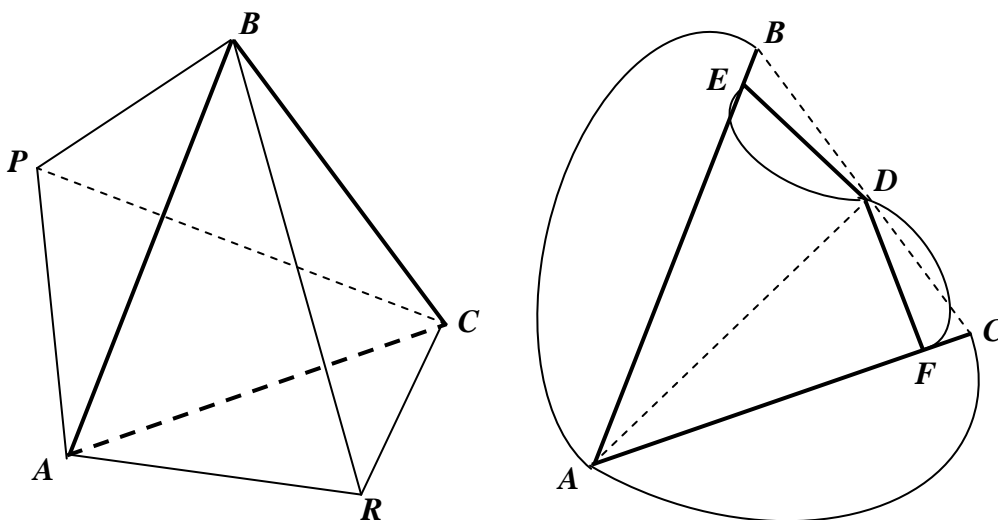


Рис. 14

Чтобы было понятно, мы на Рис. 14 справа повторили Рис. 2. Т. о., чтобы построить внешний сопутствующий  $(Bc)$  многогранник надо взять точки в середине дуги  $AC$  и дуги  $AB$ . Это точки  $R$  и  $P$  соответственно. И соединить с точками, как показано на Рис. 14 слева. Топологически  $(Bc)$  многогранник эквивалентен двум тетраэдрам, имеющим общую грань  $(ABC)$ .

Внутренний сопутствующий  $(bc)$  многогранник показан на Рис. 15. Строится он аналогично  $(Bc)$  многограннику и в соответствии с Рис. 13 справа. Очевидно,  $(bc)$  многогранник топологически эквивалентен двум тетраэдрам имеющим общее ребро (отрезок  $AD$ ).

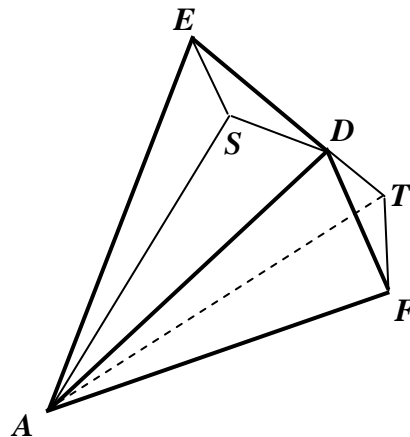


Рис. 15

Мы ввели понятие сопутствующих многогранников для удобства деления  $\mu M$  на внешнюю и внутреннюю части. Такое деление можно было бы определить и по другому (например, просто разделить на большие и малые полуконусы), но в дальнейшем нам потребуется понятие каркаса, который удобно воспринимать, как часть многогранника.

Итак, теперь наша поверхность представлена двумя частями: внешней и внутренней.

Известно, что минимальный периметр имеет именно равносторонний треугольник [3], стр. 279. Основываясь на этом будем считать, что часть каркаса, а именно - треугольник  $ABC$  фигура жёсткая. Поэтому и внешняя часть поверхности, соответствующая  $(Bc)$  многограннику тоже не подвержена деформации.

Внутренняя же часть может рассматриваться, как подвижная часть. Это может быть осуществлено за счёт движения точки  $D$  вдоль отрезков  $ED$  и  $DF$ .



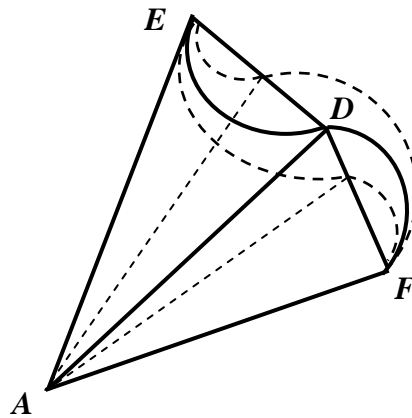


Рис. 16

При этом угол  $\omega$  будет изменяться:  $0 < \omega < \frac{\pi}{3}$ . Т. о., уравнения (9) и (10) можем считать внутренними функциями, характеризующими нашу поверхность. По сути уравнения (9) и (10) можно рассматривать, как параметрические уравнения, где в качестве параметра будет выступать угол  $\omega$ . Т. о., мы получаем уже целый класс поверхностей Мёбиуса.

$$\begin{aligned} L(\omega) &= l \cdot (2 \cdot \sin(\omega) + \cos(\omega)) \\ H(\omega) &= l(\sin(\omega) - (2 - \sqrt{3}) \cdot \cos(\omega)) \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя уравнения (15), получаем такие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega} &= -H(\omega) - k_1(\omega), & \frac{\partial H}{\partial \omega} &= L(\omega) - k_2(\omega), & \text{где} & & k_1(\omega) &= l\sqrt{3} \cdot \cos(\omega), \\ k_2(\omega) &= l\sqrt{3} \cdot \sin(\omega). \end{aligned}$$

Или:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \omega} - L(\omega) \right)^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial \omega} + H(\omega) \right)^2 = 3l^2, \quad (16)$$

кроме того:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \omega^2} = -L, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} = -H. \quad (17)$$

Рассмотрим первые производные функций  $L(\omega)$  и  $H(\omega)$ . Получим дифференциальные уравнения:

$$\frac{dL}{d\omega} = l \cdot (2 \cdot \cos(\omega) - \sin(\omega)),$$

(18)

$$\frac{dH}{d\omega} = l(\cos(\omega) + (2 - \sqrt{3}) \cdot \sin(\omega)).$$

Известно [16] стр. 368, что уравнения вида (18) ни что иное, как уравнения деформации. Только в нашем случае эти уравнения описывают не напряжения и вязкость, а длину и ширину поверхности.

Ни на что не намекая отметим, что уравнения типа (17) широко распространены в физике (см., например [3] стр.97, это и уравнения колебательного движения, и уравнения движения электрона, и уравнение Шрёдингера...).

Уравнение (16) будем называть характеристическим уравнением поверхности Мёбиуса.

Отметим также, что исследуемая поверхность обладает и осью вращения. На Рис. 11 ось вращения проходит через точку  $O$  и прямую развёртки  $EC$ . В свёрнутом виде пМ (Рис. 16) ось вращения показана голубым цветом.

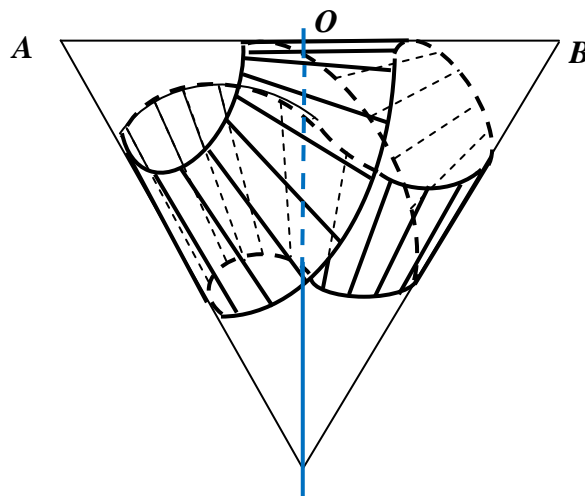


Рис. 16

Рассматривая различные характеристики пМ, интересно обратить внимание на осевую линию прямоугольника, получающегося в развёртке пМ. Она всегда должна проходить через точку  $O$  параллельно большей стороне розового прямоугольника, вписанного в развёртку (Рис. 12). По сути, осевая линия листа Мёбиуса, который сворачивается из розового прямоугольника, - это модель проективной прямой на модели проективной плоскости. Принимая  $H=0$  в формуле (10) и делая элементарные преобразования, получаем такую формулу для проективной прямой:

$$\pi = \frac{2 \cdot \omega}{\sqrt{Tg(\omega)}}, \quad (19)$$

здесь в формуле (10) принимаются такие значения:  $l=1, 2-\sqrt{3} = \left(\frac{2 \cdot \omega}{\pi}\right)^2$ .

Помня, что проективная прямая замкнута т. е. топологически гомеоморфна окружности, можно усмотреть в выражении (18) некоторую аналогию с окружностью на евклидовой плоскости, где число  $\pi$  – это отношение длины окружности к её диаметру. Понятие угла в проективной геометрии отсутствует, но никто нам не мешает рассматривать угол в модели проективной плоскости.

Ещё раз перерисуем Рис. 12 и отметим на нём граничные положения параметра  $\omega$ . Построения показывают, что максимальное значение параметра определяется углом  $ACD$  (по построению прямоугольника, показанного бледнозелёным цветом на Рис. 17). Минимальное значение параметра будет углом  $ACG$ , когда прямоугольник вырождается в свою осевую линию, т. е. когда его ширина становится равна нулю.

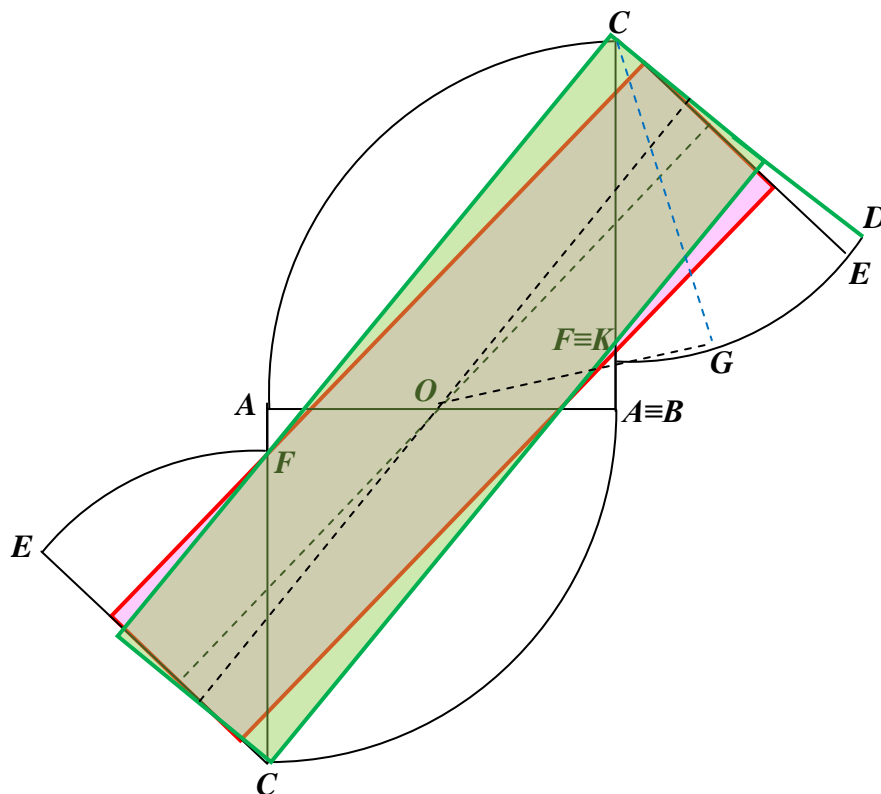


Рис. 17

Расчёты показывают, что  $\omega_{\max} \approx 69.21^\circ$ , а  $\omega_{\min} = 15^\circ$ .

## 5. Линия самопересечения

Точные построения (Рис. 18) показывают, что поверхность Мёбиуса имеет линию самопересечения (на рисунке показана красным цветом).

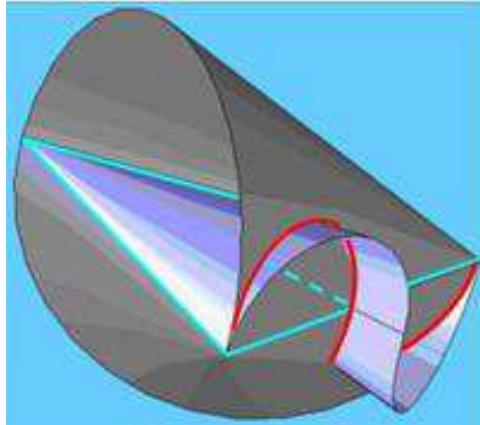


Рис. 18

Что же представляет собой эта линия? По сути дела линия самопересечения образована пересечением большого (угол при вершине  $60^\circ$ ) и малого (угол при вершине  $30^\circ$ ) полуконусов и состоит из двух симметричных частей.

Рассмотрим каркас нашей поверхности. Представим себе, что большой и малый полуконусы равномерно вырастают на каркасе из своих вершин (точки  $A$  и  $B$ ).

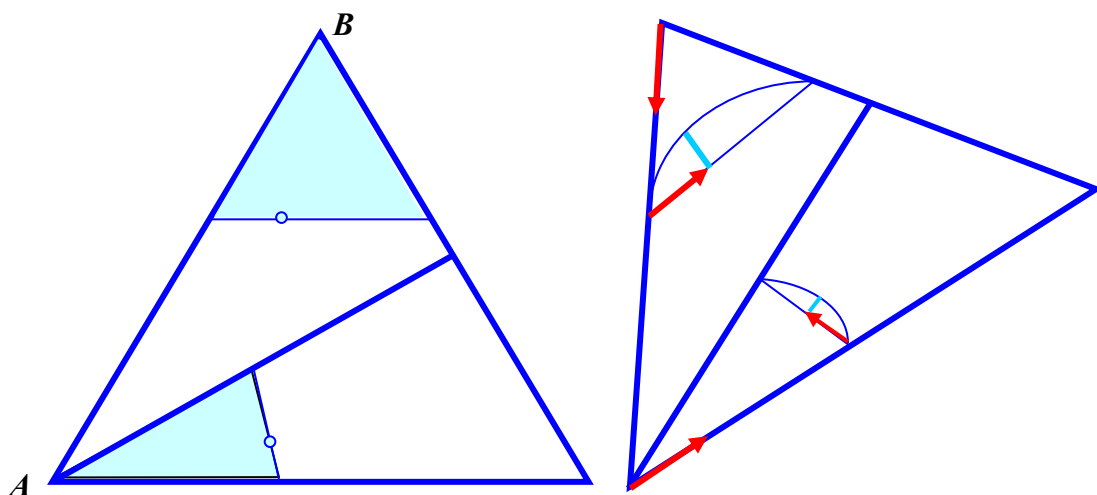


Рис. 19

Вид сверху показан на Рис. 19 слева. Маленькие кружочки – это текущие точки на основаниях полуконусов. Рисунок 19 справа – это просто небольшой разворот левого рисунка, чтобы лучше можно было

представить себе полуконусы Увеличение (натягивание на каркас) полуконусов и движение текущей точки можно характеризовать двумя векторами (для каждого полуконуса), а весь процесс роста будем рассматривать в некотором фазовом пространстве. Один вектор расположен на образующей полуконуса. Второй – на диаметре основания. Дуги оснований полуконусов будем называть фронтом движения (роста полуконусов). Текущая точка – это пересечение перпендикуляра, восстановленного на конце второго вектора с фронтом данного полуконуса.

Очевидно, в какой-то момент фронты полуконусов начнут пересекаться, а линия самопересечения будет определяться совпадением текущих точек.

Теперь дадим математическое описание этого процесса.

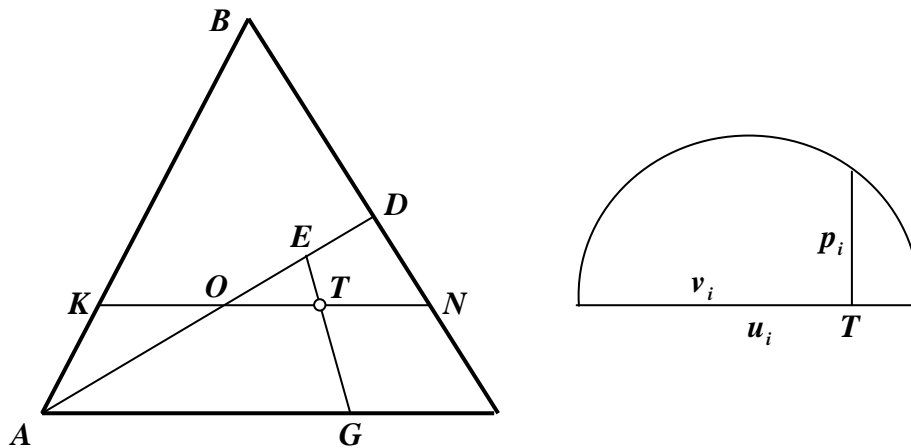


Рис. 20

На Рис. 20 справа показано основание полуконуса в сечении  $EG$  (или в сечении  $KN$ ). Здесь  $u_i$  - длина диаметра основания полуконуса, точка  $T$  – основание перпендикуляра, упирающегося в текущую точку фронта,  $p_i$  - длина этого перпендикуляра,  $v_i$  - отрезок диаметра, отсекаемый основанием перпендикуляра.

Рамках наших обозначений справедливо выражение  $p_i^2 = v_i \cdot (u_i - v_i)$ . Тогда выражение

$$v_1 \cdot (u_1 - v_1) = v_2 \cdot (u_2 - v_2) \quad (20)$$

будем называть параметрическим уравнением линии самопересечения в общем виде.

Для определённости будем считать индекс 1 принадлежащим к большому полуконусу, а индекс 2 – к малому.

Наша задача - найти функции  $v_2 = v_2(v_1, u_1)$  и  $u_2 = u_2(v_1, u_1)$ , чтобы записать параметрическое уравнение линии самопересечения в явном виде.

В дальнейшем нам понадобится значение синуса  $15^\circ$ . Введём обозначение:  $s = \text{Sin}(15^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ . Помня, что  $AB = l$ , можем записать:

$$EG = u_2 = 2 \cdot AG \cdot s.$$

$AG = AE = AO + OE$ . Треугольник  $KBN$  – равносторонний.  $KB = KN = u_1$ . Тогда  $AK = l - u_1$ . Треугольник  $AKO$  – равнобедренный ( $AK = KO$ ). Из треугольника  $AKO$  находим:  $AO = \sqrt{3} \cdot (l - u_1)$ .  $KT = v_1$ .  $OE = OT$ . Тогда  $OE = v_1 - (l - u_1)$ . Теперь можем записать:  $AG = \sqrt{3} \cdot (l - u_1) + v_1 - (l - u_1) = v_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot (l - u_1)$ . Подставляя полученное выражение в  $u_2$  получаем.

$$u_2 = 2s \cdot (v_1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot (l - u_1)). \quad (21)$$

Далее,  $v_2 = EG - ET$ . Из треугольника  $EOT$  получаем:  $ET = 2s \cdot OT$ . Помним, что  $OE = OT$ . Тогда  $ET = 2s \cdot (v_1 + (l - u_1))$ . Подставим найденное выражение и, ранее найденное, выражение для  $EG$  в  $v_2$ . Получаем:

$$v_2 = 2s \cdot \sqrt{3} \cdot (l - u_1). \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в уравнение (20) и, переходя к безиндексной записи, находим выражение для параметрического уравнения линии самопересечения в явном виде для фазового пространства поверхности Мёбиуса:

$$V - UV - 4s^2 \sqrt{3} \cdot (l - U) \cdot (V + U - l) = 0. \quad (23)$$

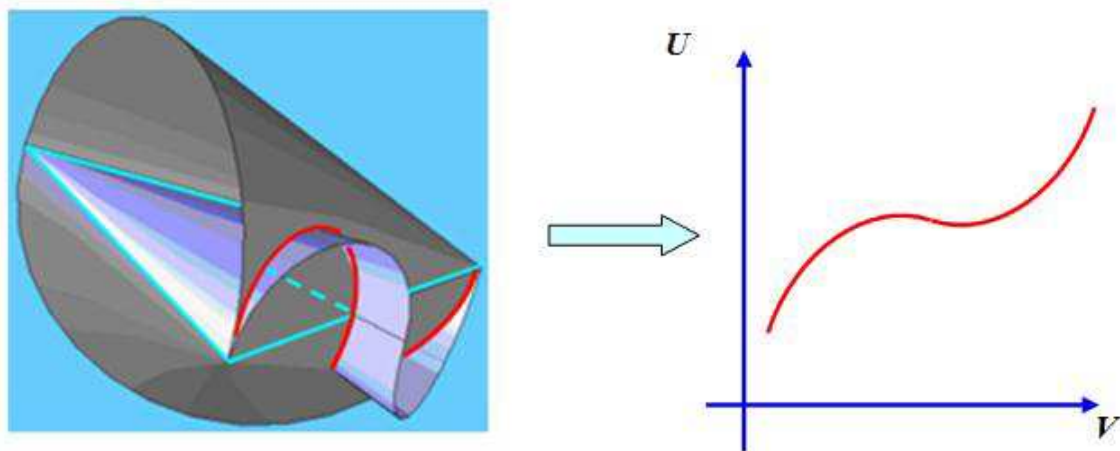


Рис. 21

В заключение, хочется сказать ещё два слова вот о чём. Безусловно, всем знакомо понятие, которое называется «Золотое сечение». Фундаментальным числом этого понятия является число  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Характеристическим уравнением для этого числа является уравнение:  $X^2 - X - 1 = 0$ . «Золотое сечение» проявляет себя не только в различных областях человеческой деятельности, но и в природе в самом широком смысле этого слова. Как в мега-, макро-, так и в микромире. Приведу всего лишь одно высказывание: «...можно утверждать, что в теории электрослабых взаимодействий возникают отношения, приближённо соападающие с «золотым сечением», играющим важную роль в различных областях науки и искусства.» [11, стр. 522]. Мы говорим, так сказать, о линейном «Золотом сечении».

Но мало кто знает, что существует понятие планарного (двумерного) «Золотого сечения» [3], стр. 176. Здесь речь идёт уже о паре чисел. Ключевыми числами здесь будут числа:  $P = 2 - \sqrt{3}$  и  $1 - P$ . Характеристическим уравнением для числа  $P$  будет:  $X^2 - 4X + 1 = 0$ . Именно с этими числами мы встречаемся на протяжении всего нашего исследования. Это и выражения (11), (20) и (21), и формулы для угла  $\omega$ , и пропорция  $\mu_0$ .

Также отметим, что мы рассматривали поверхности Мёбиуса построенные на каркасе равностороннего треугольника. Аналогичные построения возможно провести на каркасах любых треугольников, что может быть темой отдельного исследования. Кстати, из каркасов в виде правильного треугольника сложена и простейшая пирамида – элементарный тетраэдр (Рис. 22, слева).

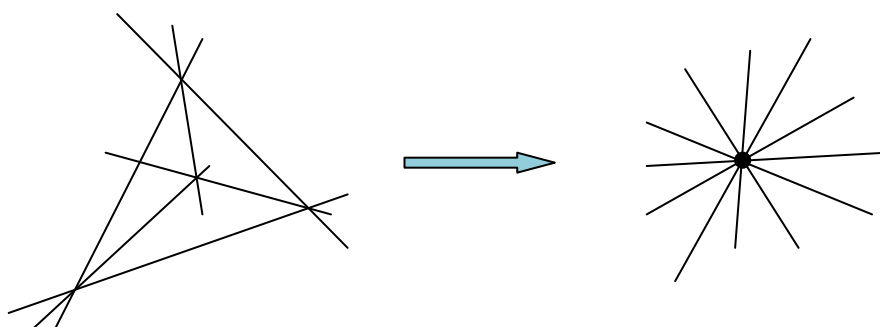


Рис. 22

Сжимая элементарный тетраэдр в точку (Рис. 22, справа), получаем узел пространственной решётки, из которого равномерно выходит 12 рёбер. Т. о., продолжая нашу фантазию, можно предположить, что исследование пМ по сути – это исследование узла некоторой пространственной решётки.

## Приложение 1

**Векторное уравнение конической поверхности.**

Что значит построить векторное уравнение поверхности. Это значит вывести выражение для радиус-вектора, который соединяет начало координат и текущую точку искомой поверхности.

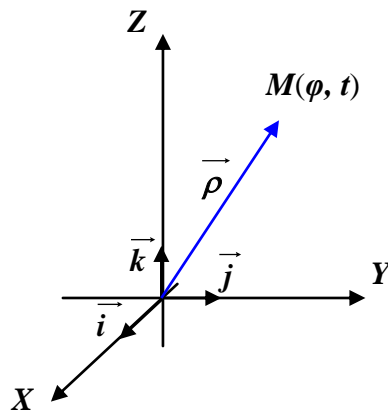


Рис. 1

Предварительно для построения нам понадобится ввести понятие единичного вектора направления [7].

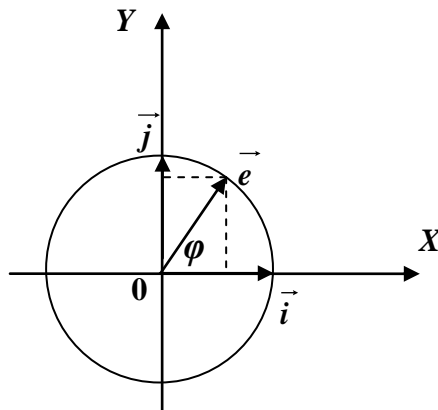


Рис. 2

Рассмотрим единичную окружность (Рис. 2). Здесь векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  - единичные орты. Тогда вектор  $\vec{e} = \vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)$  будем называть единичным вектором направления, где  $\varphi$  - традиционный полярный параметр [6].

Выведем векторное уравнение для поверхности полуконуса.



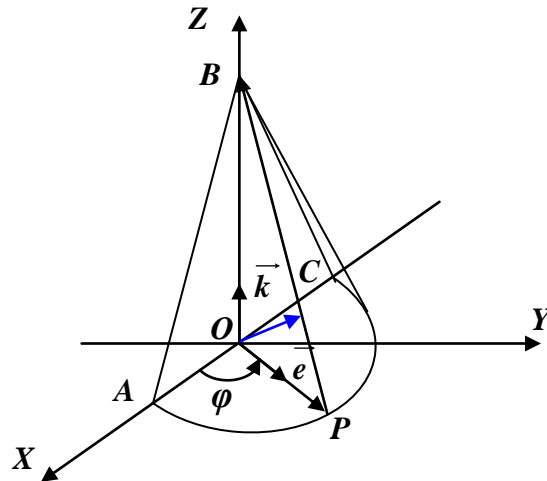


Рис. 3

Пусть  $\angle ABC = \alpha$ , а образующая конуса  $AB = l$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{PB}$  заметает поверхность полуконуса в то время как вектор  $\overrightarrow{OP}$  поворачивается вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ ,  $\varphi \in [0; \pi]$ .

Введём обозначение для поверхности полуконуса:  $\overrightarrow{M}_n(l, \alpha)$ .

Теперь можем записать векторное уравнение полуконуса, показанного на Рис. 3.

$$\overrightarrow{M}_n(l, \alpha) = l \cdot \left( \vec{k} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \vec{e} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right), \quad (1)$$

здесь  $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$  и  $OB = l \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $OP = l \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , а  $\vec{e} = \vec{i} \cdot \cos(\varphi) + \vec{j} \cdot \sin(\varphi)$ .

Согласно описанию каркаса пМ (Рис. 1)  $\alpha = 60^\circ$ . Теперь можем записать уравнение первого полуконуса:

$$\overrightarrow{M}_1 = \frac{1}{2} l \cdot (\vec{k} \cdot \sqrt{3} - \vec{e}) \quad (2)$$

Второй тип полуконуса характеризуется величинами:  $\alpha = 30^\circ$  (угол  $FAD$  при вершине  $A$ ), образующая  $AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$ .

$$\overrightarrow{M}_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} l \cdot (\vec{k} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \vec{e} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}). \quad (3)$$

Помним, что  $\sin(15^\circ) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ;  $\cos(15^\circ) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Также помним, что  $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$ ;  $\vec{M}_3 = \vec{M}_4$ .

Мы построили векторные уравнения пролукунов при условии, что нам даны образующие. Т. е. при изменении угла  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , данная образующая будет заметать поверхность полуконуса. Т. о. мы получили поверхность, характеризуемую отрезком (образующей) и одним параметром (углом  $\varphi$ ). Чтобы получить векторное уравнение поверхности, описываемое радиус-вектором, а не образующей необходимо ввести ещё один некоторый параметр. А именно:  $\vec{\rho}(\varphi, t) = \vec{OM}$ , где  $M(\varphi, t)$  - текущая точка искомой поверхности (Рис. 1). При этом можно сказать, что параметр  $t$  для каждого конкретного значения угла  $\varphi$  пробегает значения от 0 до 1. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\vec{\rho}(\varphi, t)_n = l \cdot \left( \vec{k} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \vec{e} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cdot t. \quad (4)$$

Параметр  $t$  будем называть алгебраическим, т. к. он отсутствует на наших рисунках. Покажем пример, как можно ввести геометрический параметр для уравнения (4).

Рассмотрим текущее сечение нашего полуконуса в некоторый момент  $\varphi = \varphi_i$ .

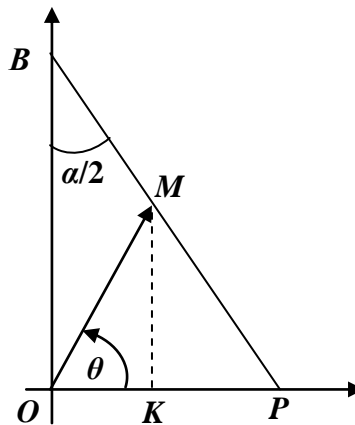


Рис. 4

В то время, как радиус-вектор  $\vec{OM}$  будет пробегать отрезок  $PB$  угол  $\theta$  будет изменяться от  $0^\circ$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Угол  $\theta$  будем называть естественным или геометрическим параметром конической поверхности. Остаётся найти зависимость текущей точки  $M$  от параметра  $\theta$ .

Используя соотношения подобия треугольников (Рис. 4) и простейших алгебраических преобразований получаем такую зависимость:

$$MP = l \cdot t = l \cdot \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta) + \operatorname{Ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\theta)}.$$

Можем переписать уравнение (19) таким образом:

$$\vec{\rho}(\varphi, \theta)_n = l \cdot \left( \vec{k} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \vec{e} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta) + \operatorname{Ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\theta)}. \quad (5)$$

Уравнение (5) и есть векторное уравнение полуконуса.

## Приложение 2

## Углы Эйлера.

Мы не будем подробно рассматривать преобразования Эйлера, это можно найти практически в каждом учебнике по аналитической геометрии в пространстве трёх измерений. Покажем только принципиальное отличие.

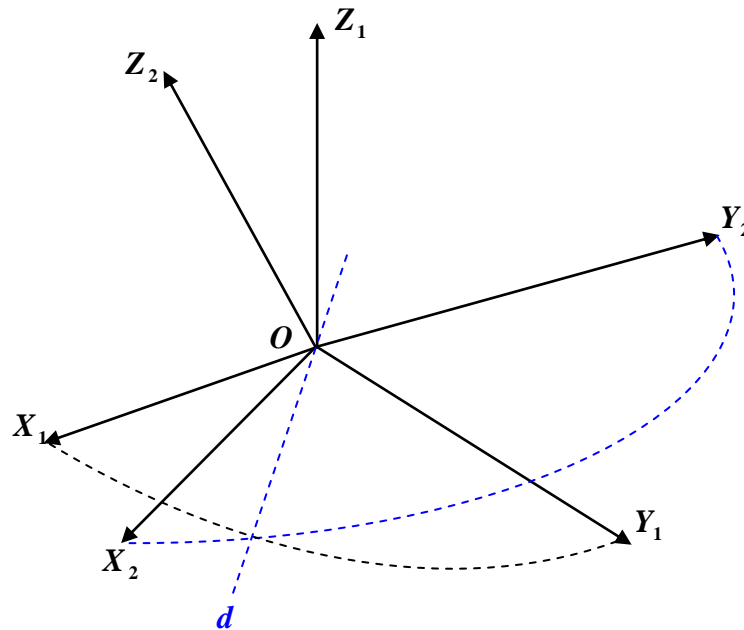


Рис. 1

Две, одинаково ориентированные системы имеют общее начало координат. Теперь, чтобы перейти от одной системы координат к другой Эйлер использовал дополнительную ось  $d$  (в литературе она называется линией узлов [12]). Здесь  $d \equiv X_1OY_1 \cap X_2OY_2$ .

Первый поворот – это вращение вокруг оси  $Z_1$  до совпадения оси  $OX_1$  с линией узлов.

Второй поворот – это вращение вокруг линии узлов до совмещения оси  $Z_1$  с осью  $Z_2$ .

Третий поворот – это вращение вокруг оси  $Z_2$  до совмещения линии узлов с осью  $OX_2$ .

Получаем такие преобразования:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \text{ где } E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \text{Cos}(\psi) \cdot \text{Cos}(\varphi) - \text{Sin}(\psi) \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \text{Sin}(\varphi); \\
e_{12} &= \text{Cos}(\varphi) \cdot \text{Sin}(\psi) + \text{Cos}(\psi) \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \text{Sin}(\varphi); \\
e_{13} &= \text{Sin}(\theta) \cdot \text{Sin}(\varphi);
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
e_{21} &= \text{Cos}(\psi) \cdot \text{Sin}(\varphi) - \text{Sin}(\psi) \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \text{Cos}(\varphi); \\
e_{22} &= -\text{Sin}(\psi) \cdot \text{Sin}(\varphi) + \text{Cos}(\psi) \cdot \text{Cos}(\theta) \cdot \text{Cos}(\varphi); \\
e_{23} &= \text{Sin}(\theta) \cdot \text{Cos}(\varphi).
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
e_{31} &= \text{Sin}(\psi) \cdot \text{Sin}(\theta); \\
e_{32} &= -\text{Cos}(\psi) \cdot \text{Sin}(\theta); \\
e_{33} &= \text{Cos}(\theta);
\end{aligned} \tag{3}$$

Из соотношений (5), (6), (7) на стр. 7 и соотношений (1), (2), (3) данного приложения находим связь между преобразованиями Эйлера и преобразованиями, которыми мы пользовались выше:

$$\text{Ctg}(\varphi) = \frac{\text{Tg}(\beta)}{\text{Sin}(\gamma)}$$

$$\text{Cos}(\theta) = \text{Cos}(\beta) \cdot \text{Cos}(\gamma)$$

$$\text{Sin}(\psi) = \frac{\text{Cos}(\gamma) \cdot \text{Sin}(\beta) \cdot \text{Sin}(\alpha) + \text{Cos}(\alpha) \cdot \text{Sin}(\gamma)}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2(\beta) \cdot \text{Cos}^2(\gamma)}}$$

**Литература:**

1. Н. И. Кованцов и др., «Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ», Киев, «Высшая школа», 1982
2. Ф. Герман, «Математика и тонкий мир», Saarbrücken, «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2016
3. Ф. Герман, «Математика в науке и вокруг нас», Saarbrücken, «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2016
4. П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», М., «НАУКА», 1968
5. Г. Ф. Лаптев, «Элементы векторного исчисления», М., «НАУКА», 1975
6. А. П. Норден, «Краткий курс дифференциальной геометрии», М., «Гос. Изд. физ-мат. литературы», 1958 (палярный параметр)
7. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин, «Дифференциалы помогают геометрии», М., «Просвещение», 1982
8. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия. Часть 1», М., «Просвещение», 1986
9. «Математический энциклопедический словарь», М., «Советская энциклопедия», 1988
10. Д. Фукс, «Лента Мёбиуса», «Квант», 1979, № 1
11. Ю. С. Владимиров, «Метафизика», М., «БИНОМ», 2002
12. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», М., «НАУКА», 1979
13. Дж. Орир, Физика, т.1, т. 2», М., «Мир», 1981
14. Ф. Герман, « $RP^2$  - проективная плоскость», Saarbrücken, «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2015
15. Ф. Кымпан, «История числа  $\pi$ », М., «Наука», 1971
16. И. В. Радченко, «Молекулярная физика», М., «Наука», 1965
17. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, «Наглядная геометрия», М., «Наука», 1981