

# О ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ Р.И. НИГМАТУЛИНА И УРАВНЕНИИ Л.Ф. РИЧАРДСОНА.

И.Н. Сибгатуллин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва  
e-mail: sibgat@ocean.ru*

Теорема, сформулированная в статье “Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы при малых силах инерции по сравнению с силой тяжести” (2018), не верна, поскольку предельного перехода от уравнений Навье–Стокса к системе уравнений гидростатического приближения при вертикальном ускорении, стремящемся к нулю, не существует. Основное последствие заключается в том, что предложенные в статье масштабы не приемлемы для применения гидростатического по вертикали приближения (квазистатического приближения). Корректная асимптотика задается традиционным параметром гидростатичности  $H/L$ , где  $H$  и  $L$  - вертикальный и горизонтальный масштабы течения. Анализ масштабов в уравнении Л.Ф. Ричардсона для вертикальной скорости в гидростатическом приближении также является некорректным.

Ключевые слова: *гидростатическое приближение, синоптические масштабы, мезомасштабы, микрометеорология, уравнения сохранения, силы инерции.*

## **I. Ошибочность теоремы, сформулированной в статье ‘Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы при малых силах инерции по сравнению с силой тяжести’ [1].**

Традиционный асимптотический анализ гидростатического приближения геофизических течений (стратифицированных сред в поле силы тяжести) основан на малости отношения  $H/L$  вертикального и горизонтального масштабов движения, которое зачастую вводится как *параметр гидростатичности* (см., например, R. Zeytounian, [2], ур. 3.9, 19.2). В работе [1] предлагается отличный подход, в котором критерием для применения гидростатического приближения является просто малость вертикального ускорения, нормированного на ускорение силы тяжести. Малость амплитуды колебаний, соответствующая малости ускорения при фиксированной частоте, может являться предпосылкой для линеаризации уравнений. Но до настоящего времени никто не формулировал на основании малости амплитуды или вертикального ускорения теорем об исключении коротковолновых движений и использовании уравнений гидростатического (квазистатического) приближения, являющихся по традиционному асимптотическому анализу длинноволновым приближением.

Предельного перехода от полных уравнений Навье–Стокса к гидростатическому приближению *при устремлении вертикального ускорения к нулю не существует*, поскольку этому прямо противоречит *конечное вертикальное ускорение нетривиальных решений уравнений гидростатического приближения* при том, что уравнение, содержащее вертикальное ускорение, заменяется на уравнение гидростатического баланса<sup>1</sup>. Доказательства существования такого предельного перехода в статье и не приведено, поэтому в виду указанного противоречия сформулированная в ней теорема не верна.

<sup>1</sup> При соответствующей вертикальной дискретизации уравнения гидростатического приближения зачастую можно представить в виде системы слоев мелкой воды [3], а один слой является частным случаем для однородной среды с проинтегрированным по вертикали уравнением неразрывности, в результате чего вертикальная скорость исключается из уравнений, но соответствует производной по времени от высоты столба жидкости и может быть выражена с помощью уравнения неразрывности через горизонтальные скорости.

Автор использует собственную или необычную для данных задач терминологию (“безынерционная вертикальная скорость”, “климатические масштабы”), в которой обычно нет необходимости. Однако именно здесь происходит путаница и причина ошибочных выводов, которые разбираются ниже. Когда речь идет о новой теореме или методе слова и определения должны быть предельно ясными и позволять проследить всю цепочку логических следствий. По мнению автора, в гидростатическом приближении “пренебрегается” вертикальной силой инерции. Это утверждение неверно, поскольку вертикальное ускорение в любых нетривиальных решениях системы уравнений гидростатического (квазистатического) приближения не равно нулю, а величина силы инерции тождественно равна массе, умноженной на ускорение.

Если следовать стремлению автора формулировать утверждения на языке динамики, то есть с помощью сил, действующих на среду, то корректным будет утверждение о том, что из системы уравнений гидростатического приближения исключается восстанавливающая (по отношению к состоянию гидростатического равновесия) сила в вертикальном направлении, то есть уравнение изменения импульса в вертикальном направлении заменяется на гидростатический баланс. Но этого ни в коем случае нельзя сказать о силе инерции в вертикальном направлении, поскольку за счет действия сил в горизонтальном направлении, содержащихся в уравнениях изменения горизонтального импульса (прежде всего горизонтального градиента давления), и уравнения неразрывности, играющего в данном случае роль кинематической связи, возникает ускоренное движение и в вертикальном направлении<sup>2</sup>.

Сила инерции, действующая на атмосферную частицу (небольшой объем воздуха в атмосфере) определяется суммой действующих сил, и при отсутствии акустических возмущений, масштаб ее вертикальной составляющей определяется не силой тяжести, а результатом совместного действия силы тяжести и плавучести (силы Архимеда), равного отклонению плотности частицы от плотности окружения, умноженному на  $\mathbf{g}$ , то есть *приведённой* или *редуцированной* силой тяжести с ускорением  $(\Delta\rho/\rho)\mathbf{g}$ , которая может быть на два-три порядка меньше обычной силы тяжести  $\rho\mathbf{g}$ , и, тем не менее, вызывать интенсивные атмосферные течения. Другими словами, частица воздуха не летает под действием силы тяжести в атмосфере как пуля, которую тормозит лишь сопротивление воздуха. Но это не может являться основанием для пренебрежения результирующей силой, действующей на атмосферную частицу в вертикальном направлении, а именно это предлагает автор [1]. В атмосфере важны стратификация и такие термодинамические свойства течений как квазиadiaбатичность и фазовые переходы, из которых естественно возникают понятия *потенциальной и виртуальной температуры* [4].

Поэтому предлагаемое автором в названии статьи [1] “пренебрежение” вертикальной силой инерции (о путанице понятий вновь см. сноску<sup>2</sup>) на основании сравнения *непосредственно* с силой тяжести приводит также к совершенно неверным оценкам границ применимости квазистатического приближения. В гидростатическом по вертикали (или *квазистатическом*) приближении отсутствует явное уравнение для изменения вертикального импульса и вместо него используется уравнение гидростатики, то есть равенство давления весу столба жидкости над частицей. Вертикальная скорость, а затем и ускорение, при этом могут быть вычислены по формуле Ричардсона как точное следствие уравнений неразрывности и притока тепла ([5–7]).

<sup>2</sup> Сила инерции и восстанавливающая силы в вертикальном направлении совпадают в случае полных уравнений Навье-Стокса, когда вертикальное ускорение явным образом присутствует входит в уравнения. В гидростатическом приближении восстанавливающая сила в вертикальном направлении исключается и вместо уравнения изменения импульса по вертикали вводится гидростатический баланс по вертикали. Однако вертикальная компонента силы инерции в гидростатическом приближении не равна нулю для любых нетривиальных решений, и таким образом про нее нельзя говорить, что она “пренебрегается”.

Такой подход применялся для моделирования атмосферных течений на масштабах от сотен километров по горизонтали. Он позволяет “фильтровать” решения полной системы уравнений, описывающие “мелкомасштабную” динамику атмосферы: обычные внутренние волны, конвекцию, а также звуковые волны [4, 8]. Разумеется, такая фильтрация происходит не без ущерба для качества прогноза и вынуждает прибегать к усложненным параметризациям, поэтому общая современная тенденция в моделях прогноза погоды: переход к негидростатическим моделям для атмосферных течений [9], совершенствуя параметризацию турбулентности. При используемых Р.И. Нигматулиным масштабах изменения характерных величин по горизонтали  $\gtrsim 1$  км, времени  $\gtrsim 100$  с, вертикальных скоростях порядка  $\lesssim 1$  м/с гидростатическое приближение для атмосферы некорректно (см. И.А. Кибель, А.М. Обухов).

Малость отношения вертикальных сил инерции к силе тяжести является одним из *свойств* гидростатического приближения (и может также являться *свойством* ряда негидростатических течений), но не может являться причиной его применения, как предлагается в новой теореме Р.И. Нигматулина, поскольку при указанной в его статье малости в 100 или 1000 раз, в атмосфере возникают перечисленные выше важные течения, которые не могут быть описаны с помощью гидростатического приближения. Так, по аналогии, скорость любого автомобиля “пренебрежимо” мала по сравнению со скоростью света, но произойдет ли авария может зависеть от того движется автомобиль со скоростью 20 или 200 км/ч.

Основной побочный эффект предлагаемого подхода заключается в неверном определении в [1] пространственных и временных масштабов применения гидростатического приближения.

## II. Некорректность модификации уравнения Ричардсона для вертикальной скорости в квазистатическом приближении.

Л.Ф. Ричардсон в 1922 году в фундаментальном труде по численному прогнозу погоды “Weather prediction by numerical process” [5, 6] посвятил целую главу выводу и исследованию свойств уравнения для вертикальной скорости как точного следствия гидростатического приближения: в указанной книге ур. 18 на стр. 118 и ур. 4 на стр. 123, в книге П. Линча, посвященной истории развития численного моделирования погоды “The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson’s Dream” [6] ур. 2.19 стр. 40, А. Kasahara (1967) [7] ур. 2.13, в книге А. Eliassen “Dynamic Meteorology” [10] 1957 г, также его статью 1949 г [11], и т.д.

Р.И. Нигматулин в 2018 г. не ссылаясь привел вывод этого уравнения (см. ур. (3.4) из [1] и ур. (4), стр. 123 из [5]), и затем отбросил горизонтальный перенос (адвекцию) давления, сравнивая одно из слагаемых адвекции давления с *одним* из слагаемых горизонтальной дивергенции потока массы над частицей.

Такое сравнение является некорректным, поскольку на этом же основании можно было бы оценить дивергенцию скорости в течении несжимаемой жидкости конечным значением при *ее тождественном равенстве нулю*. Масштаб горизонтальной дивергенции потока массы в атмосфере также может на порядки отличаться от масштаба ее компонент, особенно при условиях применения гидростатического приближения. На это указывает несколько факторов: 1) основная причина сжимаемости в тропосфере - не высокие скорости, а вес атмосферного столба и изменения температуры; 2) малость полного вертикального ускорения; 3) бездивергентность геострофической компоненты скорости, 4) большой локальный прирост давления вызывает реакцию в виде быстрых гравитационных волн, которые не могут быть описаны гидростатическими моделями и обычно параметризуются. О взаимной компенсации компонент горизонтальной дивергенции в атмосфере писал еще Ж. Чарни в 1948 г. [4]. Другая нестыковка состоит в том, что градиент давления в адвекции давления оценивается *динамически* как  $U^2/L$ , то есть горизонтальная скорость только таким образом влияет на давление. И не учитывается сложный атмосферный циклогенез. Если давление представить *гидростатически* как

вес атмосферного столба, то получится другая оценка. Несмотря на то, что в определенных случаях адвекцией давления действительно можно пренебречь (как и горизонтальной дивергенцией или вообще полной производной давления), в общем случае пренебрежение адвекцией давления на основании анализа [1] *нарушает симметрию уравнений* и позволяет частице накапливать некомпенсированное вертикальное перемещение, что в свою очередь может привести к нефизичным эффектам и вычислительным проблемам.

Из изложенного следует, что предложенная в [1] переформулировка системы Ричардсона [5, 7] не приемлема для моделирования ‘климатических и метеорологических процессов’, а также прогноза погоды, на любых масштабах. Система Л.Ф. Ричардсона<sup>3</sup> более десятилетия использовалась в центре атмосферных исследований NCAR в качестве основной модели прогноза погоды [7, 12], и имеется огромный материал по исследованию ее конечно-разностных аппроксимаций, проблем устойчивости и гиперболичности для различных вертикальных дискретизаций несколькими научными коллективами [3, 12, 13].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Nigmatulin, “Equations of hydro-and thermodynamics of the atmosphere when inertial forces are small in comparison with gravity,” *Fluid Dynamics*, vol. 53, no. 1, pp. S121–S130, 2018.
2. R. K. Zeytounian, *Meteorological fluid dynamics. Asymptotic modelling, stability and chaotic atmospheric motion*. Springer, 1991.
3. A. Bourchtein and V. Kadychnikov, “Well posedness of the initial value problem for vertically discretized hydrostatic equations,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 41, no. 1, pp. 195–207, 2004.
4. J. G. Charney, *On the Scale of Atmospheric Motions, reprint*, pp. 251–265. Boston, MA: American Meteorological Society, 1990.
5. L. F. Richardson, *Weather prediction by numerical process*. Cambridge university, 1922, 2007.
6. P. Lynch, *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson’s Dream*. Cambridge, 2006.
7. A. Kasahara and W. M. Washington, “NCAR Global General Circulation Model of the Atmosphere,” *Monthly Weather Review*, vol. 95, p. 389, Jan 1967.
8. V. Kadyshnikov, “Small oscillations of the polytropic atmosphere and the filtering role of the hydrostatic approximation,” *Meteorologiya i Gidrologiya*, pp. 23–33, 1979.
9. A. Gavrikov, S. K. Gulev, M. Markina, N. Tilinina, P. Verezemskaya, B. Barnier, A. Dufour, O. Zolina, Y. Zyulyaeva, M. Krinitskiy, I. Okhlopkov, and A. Sokov, “RAS-NAAD: 40-yr High-Resolution North Atlantic Atmospheric Hindcast for Multipurpose Applications (New Dataset for the Regional Mesoscale Studies in the Atmosphere and the Ocean),” *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, vol. 59, pp. 793–817, 04 2020.
10. A. Eliassen and E. Kleinschmidt, *Dynamic Meteorology*, vol. 10 of *Encyclopedia of Physics, Handbuch der Physik*. Springer, Berlin, Heidelberg, Jan 1957.
11. A. Eliassen, “The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable,” *Geofysisk. Publ.*, vol. 17, no. 3, p. 44, 1949.
12. A. Kasahara, “Various Vertical Coordinate Systems Used for Numerical Weather Prediction,” *Monthly Weather Review*, vol. 102, p. 509, Jan 1974.
13. J. Oliger and A. Sundström, “Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 35, no. 3, pp. 419–446, 1978.

---

<sup>3</sup> С высотой в качестве вертикальной координаты и использованием уравнения Ричардсона для вертикальной скорости. В настоящее время в качестве вертикальной координаты в основном используются другие переменные, предоставляющие преимущества при численном моделировании [9, 12].