УДК 519.1

Грушка Д. С., Лебідь В. О.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p11-14

ПОБУДОВА КОСПЕКТРАЛЬНИХ ГРАФІВ ВІДНОСНО УЗАГАЛЬНЕНОЇ МАТРИЦІ СУМІЖНОСТІ

Спектральна теорія графів використовує власні значення матриць, асоційованих із графом, для визначення структурних властивостей графа. У статті розглянуто спектр узагальненої матриці суміжності. Графи з однаковим спектром називаються коспектральними. Розглянуто побудову за допомогою GM-комутації коспектральних графів, які утворені із циклу парної довжини C_{2n} та однієї точки v, яка сполучена рівно з половиною вершин циклу. Для таких графів при невеликих n визначено пари коспектральних графів.

Ключові слова: узагальнена матриця суміжності, коспектральні графи, GM-комутація.

Вступ

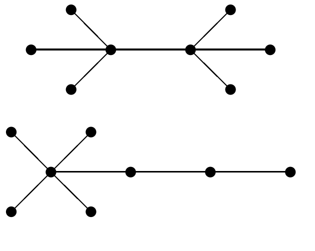
Спектральна теорія графів — напрям у теорії графів, що вивчає спектральні властивості матриць (наприклад, власних значень та власних векторів), асоційованих із графами. Спектр графа містить комбінаторну інформацію про граф, тому є корисним інструментом для розв'язання багатьох проблем у теорії графів.

Простим неорієнтованим графом G будемо називати впорядковану пару (V, E), у якій V — деяка непорожня множина (множина вершин) і E — множина, що складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер).

З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, елементи якої визначаються як:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } i \text{ та } j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Вершини графа називаються *суміжними*, якщо вони з'єднані ребром. Множина всіх власних значень матриці $A(G)$ називається *спектром графа* G і позначається $\sigma(A)$. *Характеристичним поліномом* графа G називають поліном $P_G(\lambda) = \det(A(G) - \lambda I)$. Графи, що мають однаковий спектр, називаються *коспектральними*.



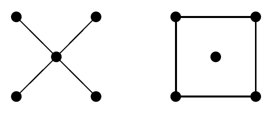
$$\sigma(A) = \left\{0^4, \tfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}, \tfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Рис. 1. Вперше представлена пара коспектральних дерев

Питання «Які графи визначаються своїм спектром?» розглядали у 1956 році Гюнхард і Прімас [1] у статті, яка пов'язана з теорією Гюккеля з хімії. До того часу вважали, що граф однозначно визначається своїм спектром, але Колатц і Синоговіц [2] у 1957 році представили пару коспектральних дерев (див. рис. 1), чим спростували це твердження.

Доведено, що графи, у яких менше, ніж п'ять вершин, однозначно визначаються своїм спектром (будемо називати їх DS — від англійського «determined by its spectrum») відносно звичайної матриці суміжності. Розглянемо два графи з їхніми матрицями суміжності (рис. 2).

Це приклад неізоморфних коспектральних графів, які вперше запропонував Цвєтковіч [3]. Для зручності цю пару називають «Saltire pair».



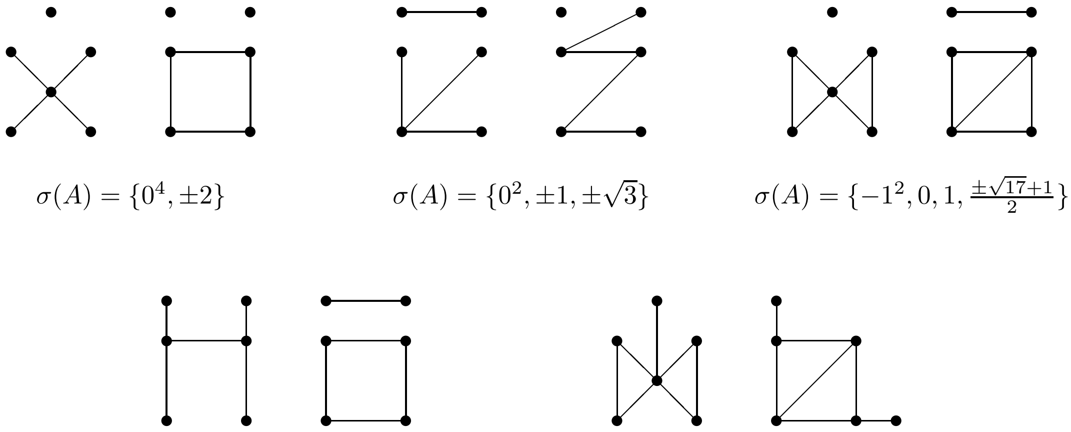
$$\sigma(A) = \{0^3, \pm 2\}$$

Рис. 2. Пара коспектральних графів на 5 вершинах відносно A

Для графів на шістьох вершинах існує п'ять пар коспектральних графів, зображених на рис. 3.

Проте жоден із графів, побудованих на шести і менше вершинах, не має коспектральної пари відносно узагальненої матриці суміжності. У наступному розділі введено означення узагальненої матриці суміжності та розглянуто умови, за яких два графи будуть коспектральними відносно такої матриці.

За останні 60 років з'явилося багато конструкцій коспектральних графів, серед яких найбільшу



$\sigma(A) = \{0^4, \pm 2\}$ $\sigma(A) = \{0^2, \pm 1, \pm\sqrt{3}\}$ $\sigma(A) = \{-1^2, 0, 1, \frac{\pm\sqrt{17}+1}{2}\}$

$\sigma(A) = \{0^2, \pm 1, \pm 2\}$ $\sigma(A) = \{-1^2, -1.903, 0.194, 1, 2.709\}$

Рис. 3. Пари коспектральних графів на 6 вершинах відносно A

їх кількість дозволяє побудувати метод GM-комутації, який ми розглядаємо далі. Проте довести DS графів набагато важче, ніж побудувати коспектральні пари. Швенк [4] навів метод, який доводить, що майже всі дерева є не DS графами. У загальному для всіх графів гіпотеза про те, що майже всі графи є DS графами, залишається не доведеною.

Узагальнена матриця суміжності

У вступі ми розглядали коспектральність графів відносно звичайної матриці суміжності. Звісно, відповідь на запитання «Які графи однозначно визначаються своїм спектром?» залежить від вибору матриці, яка асоційована з графом.

У цьому розділі ми будемо розглядати узагальнену матрицю суміжності та коспектральність графів відносно неї.

Означення 1. Для графа G з матрицею суміжності A будь-яка матриця вигляду $M = xI + yJ + zA$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, називається узагальненою матрицею суміжності графа G (J — це матриця, кожен елемент якої дорівнює одиниці, а I — одинична матриця).

Наступні матриці, які ми будемо розглядати, є узагальненими матрицями:

1. Матриця суміжності A ($x = y = 0$, $z = 1$).
2. Матриця суміжності доповнення $\overline{A} = -I + J - A$ ($x = -1$, $y = 1$, $z = -1$).
3. Матриця Зейделя $S = \overline{A} - A = -I + J - 2A$ ($x = -1$, $y = 1$, $z = -2$).

Ми можемо обмежити узагальнені матриці суміжності виглядом $A + \alpha J$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, без втрати загальності. Для таких матриць справедлива така теорема Джонсона та Ньюмана [5]:

Теорема 1. *Для матриці суміжності A визначимо множину узагальнених матриць суміжності як $\mathscr{A} = \{A + \alpha J \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Якщо G і $\widehat{G}$ коспектральні відносно двох матриць із $\mathscr{A}$, тоді вони коспектральні відносно всіх матриць $\mathscr{A}$.*

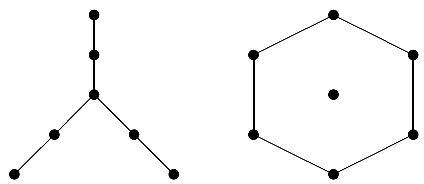
Зазначимо, що $-\overline{A} - I \in \mathscr{A}$ та $-\frac{1}{2}(S + I) \in \mathscr{A}$. Отже, маємо:

Наслідок 2. *Якщо два графи коспектральні відносно однієї з пар матриць: A та $\overline{A}$; A та S; $\overline{A}$ та S, тоді вони коспектральні відносно всіх узагальнених матриць суміжності.*

Найменша пара коспектральних графів відносно узагальненої матриці суміжності з'являється для графів на семи вершинах, зображених на рис. 4.

Побудова коспектральних графів

Метод Швенка для дерев. Швенк розглянув випадок з'єднання двох графів, які не мають спільних вершин, за допомогою «склеювання» фіксованої вершини з одного графа із фіксованою вершиною іншого графа.



$$\sigma(A) = \{-1^2, 0, 1^2, \pm 2\}$$
$$\sigma(\overline{A}) = \{-2^2, 0^2, 1, \tfrac{\pm\sqrt{33}+3}{2}\}$$
$$\sigma(S) = \{-3^2, -2, 1^2, 3^2\}$$

Рис. 4. Пара коспектральних графів відносно $\mathscr{A}$

Означення 2. Для графа G зафіксуємо вершину v. Для графа G', який не має з графом G спільних вершин, зафіксуємо вершину v'. Коалесценцією графів G та G' відносно фіксованих вершин називається граф $G \cdot G'$, утворений ідентифікацією вершин $v \equiv v'$.

Спектр коалесценції графів визначається такою теоремою:

Теорема 3. *Характеристичний многочлен коалесценції двох графів визначається за формулою:*

$$P_{G\cdot G'}(\lambda) = P_G(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda) + \\ + P_{G'}(\lambda)P_{G-v}(\lambda) - \lambda P_{G-v}(\lambda)P_{G'-v'}(\lambda),$$

де $G - v$ ($G' - v'$) — підграф графа G (G'), отриманий видаленням вершини v (v').

Цей факт дозволяє Швенку довести таке твердження [6]:

Наслідок 4. *Нехай G та G', $G - v$ та $G' - v'$ — пари коспектральних графів. Нехай H — довільний граф із фіксованою точкою u. Тоді коалесценції графів $G \cdot H$ та $G' \cdot H$ відносно точок v, u та v', u відповідно коспектральні.*

Розглянемо приклад, коли $G = G'$ граф із фіксованими вершинами v та v'.

Характеристичні многочлени графів $G - v$ та $G' - v'$ рівні

$$P_{G-v}(\lambda) = P_{G'-v'}(\lambda) = \lambda^8 - 6\lambda^6 + 10\lambda^4 - 4\lambda^2.$$

Отже, графи $G - v$ та $G' - v'$ коспектральні. Тоді для довільного графа H коалесценції графів $G \cdot H$ та $G' \cdot H$, зображені на рис. 5, теж коспектральні.

За допомогою твердження у наслідку Швенк довів відому теорему:

Теорема 5. *Майже всі дерева є не DS-графи відносно матриці суміжності.*

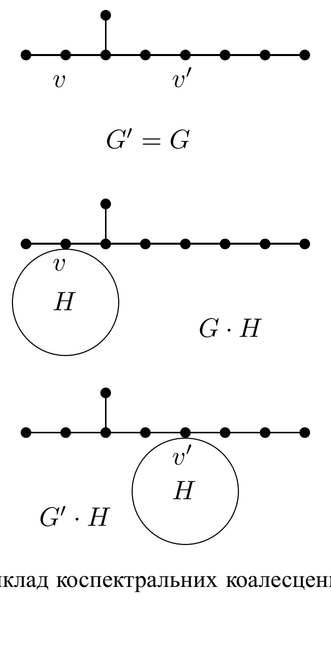


Рис. 5. Приклад коспектральних коалесценцій графів

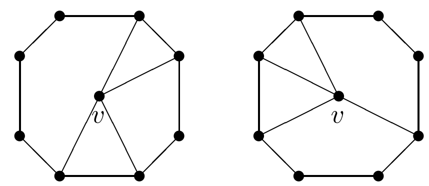


Рис. 6. Пара коспектральних графів (C_8, v)

Зауваження 1. Після Швенка Годзіл та МакКей [7] довели, що майже всі дерева є не DS-графи відносно матриці суміжності доповнення. Отже, за теоремою 1 майже всі дерева є не DS-графи відносно узагальненої матриці суміжності.

Також Годзіл та МакКей розглянули перетворення матриць суміжності, яке не змінює спектр матриці. Такий метод побудови коспектральних графів називається GM-комутацією.

GM-комутація. GM-комутація дає змогу побудувати коспектральні графи відносно матриці суміжності [8]

Теорема 6. *Нехай N — (0,1)-матриця розміру $b \times c$, сума елементів у стовпчиках якої дорівнює 0, b або $\frac{b}{2}$. Нехай матриця $\tilde{N}$ отримана з матриці N заміною кожного елемента стовпчика v із сумою $\frac{b}{2}$ на доповнення $1 - v$. Симетрична матриця B розміру $b \times b$, сума елементів у стовпчиках (та рядках) якої стала, C — симетрична матриці розміру $c \times c$.*

Розглянемо матриці

$$M = \begin{pmatrix} B & N \\ N^T & C \end{pmatrix}, \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} B & \tilde{N} \\ \tilde{N}^T & C \end{pmatrix}.$$

Тоді M та $\tilde{M}$ коспектральні.

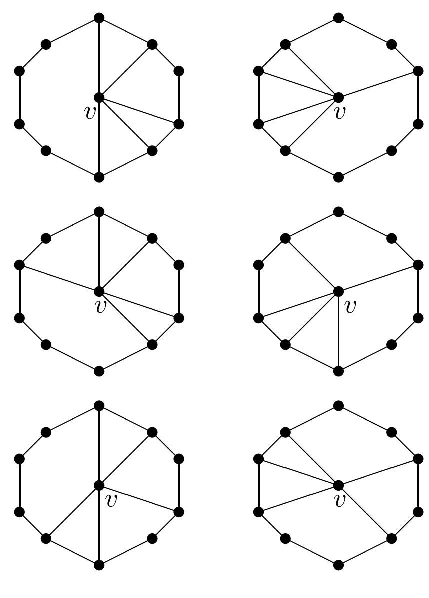


Рис. 7. Пара коспектральних графів (C_{10}, v)

Зауваження 2. Якщо матриці M та $\tilde{M}$ є матрицями суміжності графів, то GM-комутація дозволяє побудувати коспектральні доповнення. Отже, за теоремою 1 цей метод продукує коспектральні графи відносно узагальненої матриці суміжності.

Розглянемо приклад GM-комутації для графів G, які утворені з циклу парної довжини C_{2n} та однієї точки v, яка сполучена рівно з половиною вершин циклу. Для цього випадку $b = 2n$, $c = 1$, матриці B та C є матрицями суміжності циклу та точки відповідно. У матриці N сума елементів кожного стовпчика дорівнює n.

При $n \leq 3$ не існує пар коспектральних для таких графів.

При $n = 4$ з'являється пара коспектральних графів, зображених на рис. 6.

При $n = 5$ з'являються три пари коспектральних графів, зображених на рис. 7.

Роботу виконано в рамках науково-дослідного проекту «Матричні методи у теоріях груп, напівгруп, графів і метричних просторів».

Список літератури

1. Günthard H. H. Zusammenhang von Graphentheorie und MO-Theorie von Molekeln mit Systemen konjugierter Bindungen / Hs. H. Günthard, H. Primas // Helv. Chim. Acta. — 1956. — Bd. 39. — S. 1645–1653.
2. Collatz L. Spektren endlicher Grafen / L. Collatz, U. Sinogowitz // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1957. — Bd. 21. — S. 63–77.
3. Cvetkovich D. M. Graphs and their spectra / D. M. Cvetkovich // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1971. — Vol. 354–356. — P. 1–50.
4. Schwenk A. J. Almost all trees are cospectral / A. J. Schwenk // New Directions in the Theory of Graphs / ed. by F. Harary. — New York : Academic Press, 1973. — P. 275–307.
5. Johnson C. R. A note on cospectral graphs / C. R. Johnson, M. Newman // J. Combin. Theory B. — 1980. — Vol. 28, iss. 1. — P. 96–103.
6. Cvetković D. M. Spectra of Graphs / D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs. — Third edition. — Heidelberg : Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995. — 447 p.
7. Godsil C. Some computational results on the spectra of graphs / C. Godsil, B. Mckay // Combinatorial Mathematics IV / ed. by Louis R. A. Casse, Walter D. Wallis. — Vol. 560. — Berlin : Springer-Verlag, 1976. — P. 73–92.
8. van Dam E. R. Which graphs are determined by their spectrum? / E. R. van Dam, W. H. Haemers // Linear Algebra and its Applications. — 2003. — Vol. 373. — P. 241–272.

D. Grushka, V. Lebid

THE CONSTRUCTION OF COSPECTRAL GRAPHS WITH RESPECT TO THE GENERALIZED ADJACENCY MATRIX

Spectral graph theory uses the eigenvalues of matrices associated with a graph to determine the structural properties of the graph. The spectrum of the generalized adjacency matrix is considered in the paper. Graphs with the same spectrum are called cospectral. Is every graph uniquely determined by its spectrum (DS for short)?

This question goes back for about half a century, and originates from chemistry. In 1956 Gunthard and Primas raised the question in a paper that related the theory of graph spectra to Huckel's theory. At that time it was believed that every graph is determined by the spectrum, until in 1957 Collatz and Sinogowitz presented a pair of cospectral trees. In 1967 Schwenk proved that for almost all trees there is another tree with the same spectrum. Such a statement is neither proved nor refuted for the class of graphs in general. Till now, computational experiments were done on the set of all graphs on up to 12 vertices by Haemers. Computer enumerations for small n show that up to 10 vertices the fraction of graphs that are DS decreases, but for $n = 11$ and $n = 12$ it increases again.

We consider the construction of the cospectral graphs called GM-switching for graph G taking the cycle C_{2n} and adjoining a vertex v adjacent to half the vertices of C_{2n}. For these graphs we determine the pairs of cospectral nonisomorphic graphs for small n. It is an operation on graphs that leaves the spectrum of the generalized adjacency matrix invariant. It turns out that for the enumerated cases a large part of all cospectral graphs comes from GM switching, and that the fraction of graphs on n vertices with a cospectral mate starts to decrease at some value of $n < 11$ (depending on the matrix). Since the fraction of cospectral graphs on n vertices constructible by GM switching tends to 0 if $n \to \infty$, the present data give some indication that possibly almost no graph has a cospectral mate.

Haemers and Spence derived asymptotic lower bounds for the number of graphs with a cospectral mate from GM switching.

Keywords: generalized adjacency matrix, cospectral graphs, GM-switching.

Матеріал надійшов 06.03.2018