Die Würfelschlange

Henning Thielemann

31. Mai 2019

1 Der Trick

Die Würfelschlange ist ein Experiment des Mathematikums in Gießen, welches sich auch als Zaubertrick aufführen lässt.

Ein Zauberkünstler bittet einen Zuschauer, etwa 50 Spielwürfel zu werfen und in einer Reihe aneinanderzulegen, etwa so:

⚅ ⚃ ⚁ ⚄ ⚂ ⚁ ⚀ ⚅ ⚀ ⚃ ⚃ ⚃ ⚀ ⚂ ⚂ ⚁ ⚅ ⚁ ⚃ ⚀ ⚂ ⚀ ⚀ ⚄ ⚄ ⚄ ⚀ ⚂ ⚅ ⚀ ⚄ ⚅ ⚀ ⚂ ⚄
⚃ ⚀ ⚂ ⚂ ⚃ ⚄ ⚀ ⚄ ⚀ ⚂ ⚄ ⚃ ⚀ ⚁ ⚀

Der Zuschauer soll sich nun heimlich einen der ersten sechs Würfel aussuchen. Er wählt beispielsweise den zweiten Würfel. Dessen Augenzahl ist 4. Er soll entsprechend dieser Augenzahl auf der Würfelschlange weiterspringen. So gelangt er zum sechsten Würfel mit der Augenzahl 2. Dieses Springen entsprechend der Augenzahl soll der Zuschauer so lange wiederholen, bis er einen Sprung nicht mehr innerhalb der Würfelschlange ausführen kann. Im obigen Beispiel werden die folgenden Würfel nacheinander ausgewählt:

⚅ **⚃** ⚁ ⚄ ⚂ **⚁** ⚀ **⚅** ⚀ ⚃ ⚃ ⚃ ⚀ **⚂** ⚂ ⚁ **⚅** ⚁ ⚃ ⚀ ⚂ ⚀ **⚀** **⚄** ⚄ ⚄ ⚀ ⚂ **⚅** ⚀ ⚄ ⚅ ⚀ ⚂ **⚄**
⚃ ⚀ ⚂ ⚂ **⚃** ⚄ ⚀ ⚄ **⚀** **⚂** ⚄ ⚃ **⚀** **⚁** ⚀

Der Zaubertrick besteht darin, dass der Zauberkünstler den letzten gewählten Würfel errät. Im Beispiel wäre das der vorletzte Würfel mit der Augenzahl 2.

2 Auflösung des Tricks

Wie findet der Zauberkünstler den letzten vom Zuschauer gewählten Würfel heraus? Er sucht sich wie der Zuschauer zufällig einen der sechs ersten Würfel aus und vollführt heimlich Sprünge auf die gleiche Art wie der Zuschauer. Wennn er beispielsweise den ersten Würfel wählt, dann sähe das so aus:

⚅ ⚃ ⚁ ⚄ ⚂ ⚁ **⚀** **⚅** ⚀ ⚃ ⚃ ⚃ ⚀ **⚂** ⚂ ⚁ **⚅** ⚁ ⚃ ⚀ ⚂ ⚀ **⚀** **⚄** ⚄ ⚄ ⚀ ⚂ **⚅** ⚀ ⚄ ⚅ ⚀ ⚂ **⚄**
⚃ ⚀ ⚂ ⚂ **⚃** ⚄ ⚀ ⚄ **⚀** **⚂** ⚄ ⚃ **⚀** **⚁** ⚀

Bereits beim 8. Würfel trifft der Zauberkünstler auf den Würfel des Zuschauers und von da an wählt er immer die gleichen Würfel wie dieser.

3 Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Offensichtlich funktioniert der Trick nicht immer. Würfelt der Zuschauer beispielsweise folgende Zahlen

⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ⚅ ...

so kann der Zauberkünstler den letzten gewählten Würfel nur raten, wenn er den ersten gewählten Würfel kennt. Zahlenfolgen, bei denen die Sprungfolgen von Zauberkünstler und Zuschauer nicht zusammenlaufen sind aber sehr selten.

3.1 Abschätzung

Es folgt eine Abschätzung dafür, wie wahrscheinlich der Trick mindestens funktioniert. Dazu berechnen wir eine obere Abschätzung dafür, dass der Trick nicht funktioniert. Dafür greifen wir uns die Situation vor einem Sprung heraus, beispielsweise

⚅ ⚀ ⚃ ⚃ ⚃ ⚀ ⚂ .

Da Sprünge maximal sechs Würfel umfassen, muss der Zuschauer wenigstens eine der Zahlen ⚀ ⚃ ⚃ ⚃ ⚀ ⚂ gewählt haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass darunter die letzte ⚂ ist, ist wenigstens $\frac{1}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zauberkünstler den Würfel des Zuschauers in diesem Schritt verfehlt, höchstens $\frac{5}{6}$.

Der Zauberkünstler wird im Durchschnitt 50/3,5 Sprünge absolvieren. Also ist die Wahrscheinlichkeit, die Würfel des Zuschauers bei jedem Sprung zu verfehlen, höchstens $\left(\frac{5}{6}\right)^{50/3{,}5}$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für das Gelingen des Tricks mindestens $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{50/3{,}5}$, was etwa 92% entspricht.

3.2 Genaue Berechnung

Wenn wir wissen wollen, wie wahrscheinlich sich Zauberkünstler und Zuschauer auf einem Würfel in einer Schlange aus 50 Würfeln antreffen, so können wir folgendes Spiel 50 Runden lang spielen: Gespielt wird auf einem Streifen bestehend aus 50 Feldern. Beide Spieler stehen auf ihren Anfangspositionen innerhalb der ersten sechs Felder. Wenn in der n. Runde keiner der beiden Spieler an der n. Position in der Würfelschlange steht, so passiert in dieser Runde nichts und wir gehen zur nächsten Runde über. Wenn in der n. Runde einer der beiden Spieler an der n. Position in der Würfelschlange steht, so darf er würfeln und entsprechend weiterziehen. Wenn beide Spieler auf der Position n stehen, haben sie sich getroffen. Sie würfeln dann im Folgenden nicht mehr, wir verschieben sie aber formal immer wieder auf die aktuelle Position. Auf diese Weise können wir elegant erfassen, ob sich die Spieler *bis* zur n. Position getroffen haben und nicht nur, ob sie sich genau auf der n. Position getroffen haben.

Mit diesen Spielregeln kann jeder Spieler im Verlaufe des Spieles immer nur maximal 5 Felder von der Position der Rundennummer entfernt sein. Es gibt 21 Möglichkeiten für die Position der Spieler relativ zur aktuellen Position. Diese Anordnungen und die Wahrscheinlichkeiten ihrer Übergänge sind in Abbildung 1 dargestellt.

Dieser Graph lässt sich in eine Matrix M übersetzen. Es ist $e_0^T \cdot M^n \cdot v$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zauberkünstler und Zuschauer bis zum $(n+1)$. Würfel aufeinander treffen. Für die Berechnung der Matrixpotenz M^n gibt es verschiedene effiziente Verfahren basierend auf Eigenwertzerlegung oder binärer Exponentiation.

Die verwendeten Matrizen und Vektoren sind

- der Einheitsvektor e_0 mit $e_0^T = (1, 0, \ldots, 0)$,
- der Startvektor v mit $v^T = \frac{1}{36} \cdot (1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1)$,

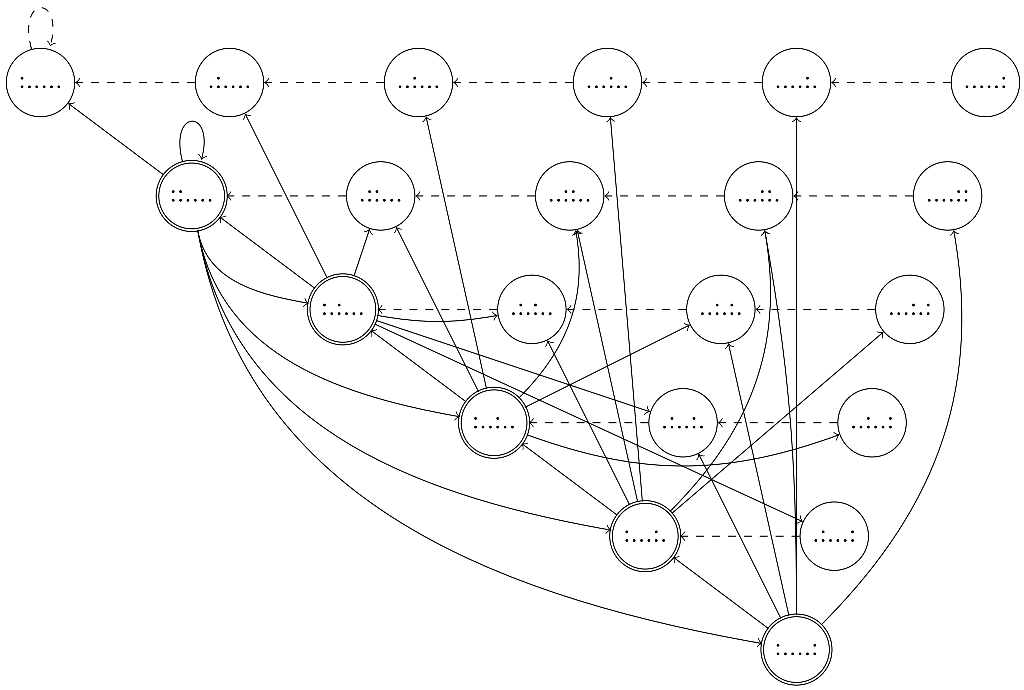

Abbildung 1: Übergangsgraph – Gestrichelte Kanten werden mit Wahrscheinlichkeit 1 genommen, durchgezogene Kanten dagegen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Jeder Knoten symbolisiert sechs aufeinanderfolgende Felder. Dabei ist jede Position eines von einem der Spieler besetzten Feldes durch „:“ gekennzeichnet. Bei einem Knoten mit einfachem Rand wird lediglich der betrachtete Spielfeldausschnitt um ein Feld weiter geschoben. Bei einem Knoten mit doppeltem Rand wird gewürfelt.

- die Übergangsmatrix M mit

$$M = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix}
6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Die Berechnung funktioniert wie folgt: Wir verfolgen, wie Zauberkünstler und Zuschauer simultan die Würfelschlange entlang springen. Wir betrachten einen Abschnitt von 6 aufeinanderfolgenden Würfeln und verschieben diesen Abschnitt mit jeder Matrixmultiplikation um einen Würfel nach rechts. Der Vektor $M^n \cdot v$ beschreibt den Abschnitt vom $(n+1)$. zum $(n+6)$. Würfel. In diesem Vektor ist für jede mögliche Position von Zauberkünstler und Zuschauer ein Element enthalten, wobei Zauberkünstler und Zuschauer nicht unterschieden werden. Deswegen hat der Vektor $\binom{7}{2}$ (Binomialkoeffizient) Elemente, also 21 (Kombinationen mit Wiederholung). Im Vektor sind die möglichen Paare lexikographisch sortiert angeordnet.

Wenn einer der Teilnehmer genau am Beginn des Abschnitts steht, so darf er einmal würfeln und den entsprechenden Sprung ausführen. In der Matrix M sind alle möglichen Übergänge mit ihrer Wahrscheinlichkeit verzeichnet. Es gibt zwei Fälle:

- Einer der Teilnehmer steht am Beginn des Abschnitts und würfelt. Es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten für eine neue Konstellation. Dieser Fall ist mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$ in der Matrix M verzeichnet.
- Keiner der Teilnehmer steht am Beginn eines Abschnitts. Relativ zum Abschnittbeginn rutschen beide Teilnehmer um eine Position nach links. Diese Fälle sind in die Matrix M mit der Wahrscheinlichkeit 1 eingetragen.

3.3 Bessere Näherung

Die beiden größten Eigenwerte der Matrix M sind $\lambda_0 = 1$ und $\lambda_1 \approx 0,9083578428$. Laut LAPACK ist M nicht diagonalisierbar, jedoch sind die beiden größten Eigenwerte isoliert. Daher stehen diese beide Eigenwerte einzeln auf der Diagonalen in der Jordan-Zerlegung $T \cdot J \cdot T^{-1}$ von M. Wenn wir die Jordan-Blöcke aller anderen Eigenwerte auf null setzen ($= J_*$), so erhalten wir eine Näherung für M

$$M \approx T \cdot J_* \cdot T^{-1} = \frac{1}{y_0^T \cdot x_0} \cdot y_0 \cdot x_0^T + \frac{\lambda_1}{y_1^T \cdot x_1} \cdot y_1 \cdot x_1^T$$

und M^n

$$M^n \approx T \cdot J_*^n \cdot T^{-1} = \frac{1}{y_0^T \cdot x_0} \cdot y_0 \cdot x_0^T + \frac{\lambda_1^n}{y_1^T \cdot x_1} \cdot y_1 \cdot x_1^T.$$

n	$e_0^T \cdot M^n \cdot w$	Näherung	$e_0^T \cdot M^n \cdot v$	Näherung
0	0.16667	0.07627	0.02778	-0.02593
1	0.19444	0.16093	0.06481	0.06809
2	0.23148	0.23782	0.11420	0.15349
3	0.28086	0.30767	0.18004	0.23107
4	0.34671	0.37111	0.26783	0.30153
5	0.43450	0.42875	0.38489	0.36554
6	0.49152	0.48110	0.42865	0.42369
7	0.52990	0.52865	0.47445	0.47650
8	0.56943	0.57185	0.52089	0.52448
9	0.60874	0.61108	0.56617	0.56805
10	0.64618	0.64672	0.60824	0.60764
20	0.86487	0.86489	0.84993	0.84994
30	0.94833	0.94833	0.94261	0.94261
40	0.98024	0.98024	0.97805	0.97805
50	0.99244	0.99244	0.99161	0.99161
60	0.99711	0.99711	0.99679	0.99679
70	0.99889	0.99889	0.99877	0.99877
80	0.99958	0.99958	0.99953	0.99953
90	0.99984	0.99984	0.99982	0.99982
100	0.99994	0.99994	0.99993	0.99993

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten für Gelingen des Würfeltricks abhängig von der Anzahl n der Würfel und Näherungen dieser Wahrscheinlichkeiten

Dabei sind x_j der Linkseigenvektor und y_j der Rechtseigenvektor zum j-größten Eigenwert λ_j.

Eine sehr gute Näherung für die Wahrscheinlichkeit für das Gelingen des Tricks ist daher

$$e_0^T \cdot M^n \cdot v \approx 1 - 1,025929108 \cdot 0,9083578428^n.$$

3.4 Fester Startwürfel für Zauberer

Wir können den Zaubertrick noch etwas abwandeln und den Zauberer stets mit dem ersten Würfel beginnen lassen. Statt des Startvektors v nehmen wir also den Startvektor w mit

$$w^T = \frac{1}{6} \cdot (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0).$$

In Tabelle 1 sind ein paar berechnete und angenäherte Wahrscheinlichkeiten für beide Varianten aufgelistet. Wie wir sehen, kann der Zauberer mit der festen Wahl des ersten Würfels die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren seines Tricks sogar geringfügig erhöhen. Intuitiv können wir das damit erklären, dass der Zauber umso mehr Information aus der Würfelschlange nutzen kann, je näher am Start er mit Springen beginnt. Umgekehrt ist es vielleicht leichter einzusehen: Je später der Zauberer startet, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, einen Würfel des Zuschauers zu treffen.