

Un invariant des variétés : l'homologie à bord

A.Balan

February 23, 2017

Abstract

We define an homology for a differential manifold, the edge homology.

1 Définition de l'opérateur bord

Soit M une variété différentielle à bord, on définit $d(M)$ le bord de la variété. On a alors la règle de Leibnitz pour les variétés à bord, le bord du produit libre de deux variétés étant :

$$d(M.N) = d(M).N + (-1)^{\dim(M)} M.d(N)$$

2 L'homologie à bord

Le bord d'une variété à bord n'a pas de bord, de plus le bord de M est de dimension $\dim(M) - 1$; on a donc :

$$d \circ d = 0$$

On prend la A -algèbre libre engendrée par les sous-variétés à bord d'une variété différentielle M (voir [G]) . On définit l'union disjointe de deux sous-variétés N, N' :

$$N \dot{\cup} N' = N + N'$$

On peut aussi avoir, dans le cas des sous-variétés orientées :

$$N^{op} = -N$$

avec N^{op} la sous-variété avec l'orientation opposée ; le bord hérite d'une orientation canonique en prenant le vecteur qui pointe vers l'extérieur. On définit l'homologie de d :

$$H_*^b(M, A) = \text{Ker}(d) / \text{Im}(d)$$

C'est un invariant topologique de la variété.

References

[G] A.Grothendieck, "Éléments de Géométrie Algébrique", Publications Mathématiques de l'IHES, PUF, Paris, 1960.