Министерство Высшего и среднего специального образования
РСФСР
Московский авиационный технологический
институт
К.т.н., доцент **БОЛОНКИН А.А.**

ЧАСТЬ 2

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(Диссертация на соискание ученой степени
достора технических наук)

NEW METHODS OF OPTIMIZATION AND THEIR APPLICATIONS
IN PROBLEMS OF DYNAMIC AND CONTROL SYSTEMS

(Thesis of next Ph.D.)

г. Москва
1969 г.

Содержание:

Абстракт

Настоящая диссертация состоит из двух частей. Первая часть посвящена математическим основам новых методов оптимизации, вторая часть – примеры и приложения этих методов к ряду технических задач.

В отличие от классической постановки задачи оптимизации:

а) Дан ункционал. Требуется найти его абсолютную минималь.

Эта задача в подавляющем большинстве случаев очень трудна и чаще всего неразрешима.

Поэтому в первой части рассматриваются также иные постановки задач:

б) Найти более «узкое» подмножество, содержащее абсолютную минималь.

в) Найти подмножество решений лучших, чем данное.

г) Найти оценки снизу данного функционала.

В настоящее время большинство исследователей, работающих в области оптимизации, заняты решением задачи в традиционной (классической) постановке – отысканием точной минимали (задача *а*). Инженера же, как правило, в реальных задачах интересует подмножество квазиоптимальных решений, выбирая из которого, он заранее уверен в получении функционала не хуже заданной величины (задача *в*) и оценки снизу, показывающих насколько далек он от точного оптимального оптимального решения (задача *г*). К тому же обычно у него есть много дополнительных соображений, которые нельзя учесть в математической модели или которые бы ее сильно усложнили. Постановка задачи в форме *в* дает ему определенную свободу выбора. Задача *г* имеет и самостоятельный интерес. Если есть оценка снизу, близкая к точной нижней грани функционала, то задачу оптимизации часто можно решить подбором квазиоптимального решения. Задача же *б* может существенно облекчить решение любой из перечисленных задач, так как сужает множество, на котором следует искать решение.

Перечисленные неклассические постановки задач потребовали новых методов решения, отличных от известных методов вариационного исчисления, принципа максимума или динамического программирования. Оказалось, что новые методы обладают значительной общностью и при попытке решить с их помощью одну из перечисленных задач можно в качестве побочного продукта получить решение другой задачи. Это может принести пользу. Так если получена хорошая оценка снизу, то, сравнивая с ней разные инженерные решения, часто удается получить решение, очень мало отличающееся от оптимального.

Излагаемый в первой части материал не сложен, но он опирается на ряд элементарных понятий и символику из теории множеств.

В диссертации принята двойная нумерация формул, теорем и рисунков. Первая цифра обзначает номер параграфа, вторая – номер формулы или теоремы в этом параграфе. Первая цифра в рисунках обозначает номер главы, вторая – номер рисунка в данной главе.

Краткое изложение (Автореферат диссертации, 28 стр.) есть в интнрнете http://viXra.org/abs/1503.0081, http://www.twirpx.com ,

Некоторые главы изложены более подробно в специальном учебном пособии «Новые методы оптимизации и их применение», Москва, Издательство МВТУ им.Баумана, 1972г., 220 стр. (См. РГБ, Российская Государственная Библиотека, Ф-801-83/869-6**).** http://vixra.org/abs/1504.0011 **v4. ,** https://www.academia.edu/11054777/ Пособие содержит также большое число примеров, упражнений и задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ ДИССЕТАЦИИ

ЧАСТЬ I

ГЛАВА 6

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1)]

§ I. Введение

Данная глава посвящена мало изученной области вариационного исчисления - особым и скользящим режимам, которые являются специальными экстремалями. Необходимость изучения специальных экстремалей диктуется следующими обстоятельствами: I) Такие экстремали часто встречаются в прикладных задачах. При некоторых граничных значениях они почти неизбежны в задачах, когда уравнения нелинейные, а управление входит линейно или гамильтониан не обладает свойством выпуклости по управлению. Последнее обстоятельство имеет место почти всегда, а потому специальные экстремали также часты как и обычные. 2) Специальные экстремали во многих случаях не усложняют (как считают до сих пор), а упрощают решение, т.к. приводят к вырождению вариационных задач и понижению порядка интегрируемой системы[2)]. 3) Абсолютный минимум может достигаться на минималях, содержащих специальные участки /2/. 4) Пренебрежение специальными экстремалями может привести к неразрешимости краевых задач /2/. 5) Специальные экстремали могут служить средством для получения приближенных решений.

I) Материалы этой главы докладывались на семинарах А.И.Кухтенко (ин-т кибернетики, г. Киев, июль 1962 г., январь, июль 1963) семинаре Л.Э. Эльсгольца (МГУ, сентябрь 1964 г.), Москва, авиац.ин-те (октябрь 1964 г.), семинаре Б.Н. Петрова (ин-т автоматики и телемеханики, апрель-май, 1965 г.), конференции мехмата Университета им. П.Лумумбы(май, 1965 г.),конференции МАТИ (январь 1967 г.), Всесоюзном совещании по математике и кибернетике (Горький, май 1967 г.) и др. Опубликовано в /I/, /2/, /4/, /105/.

2) Решение с другой стороны может и усложниться, если учесть, что включение участков специальных экстремалей требует решения дополнительных краевых задач.

Первые исследования по скользящим экстремалям были сделаны Юнгом /74/, который назвал их "обобщенные кривые", затем появились работы /31/ и /42/. Однако ни одна из указанных работ не содержит алгоритма для расчета скользящих режимов, а тем более условий входа и выхода из скользящего режима и условий его оптимальности. Материалы данной главы содержат все необходимые алгоритмы расчета специальных экстремалей .

Напомним постановку задачи оптимального управления. В Гл.2 была рассмотрена задача, которая в частном случае формулируется следующим образом. Найти абсолютный минимум функционала

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dx, \qquad (1.1)$$

если на входящие в него функции наложены независимые дифференциальные связи

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u) \quad i=1,\dots,n, \quad t_1 \le t \le t_2, \qquad (1.2)$$

и конечные значения $x(t_1), x(t_2)$ принадлежат заданному множеству R .

Здесь $x(t)$ - n - мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат; $u(t)$-r- мерная кусочно-непрерывная ограниченная вектор-функций управления, $u \in U(t)$ (область $U(t)$ типа $u_{i\,min}(t) \le u_i(t) \le u_{i\,max}(t)$); t - независимое переменное; t_1, t_2 - заданы. Предполагается, что f_0 , f_i - определены и непрерывны по t, x, u . Функции $u(t), x(t) \in Q$ и конечные значения $x(t_1), x(t_2) \in R$ называются допустимыми, если они удовлетворяют перечисленным условиям.

Были построены функции

$$A = \Psi(t_2, x(t_1)) - \Psi(t_1, x(t_2)), \quad B = f_0 - \Psi_t - \Psi_{x_i} f_i, \qquad (1.3)$$

где $\Psi(t,x)$, введенная в /31/ характеристическая функция и доказана,

Теорема 1.1. Для того, чтобы $\bar{u}, \bar{x} \in Q$ давали функционалу I абсолютный минимум, достаточно существование непрерывной, ограниченной снизу, кусочно-дифференцируемой характеристической функции $\psi(t,x)$ такой, что на допустимых кривых

I) $\xi(t,x)=\inf\limits_{u\in U(t)} B$, 2) $\int_{t_1}^{t_2}\bar{B}dt=\inf\limits_{x(t)}\int_{t_1}^{t_2}\xi dt$, 3) $\bar{A}=\inf\limits_{x(t_1),x(t_2)\in R} A>-\infty$.

Здесь черта сверху обозначает величины на абсолютной минимали.

Напомним, что необходимое условие стационарности п. 2 теоремы 1.I приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа, имеющим место вдоль экстремали

$$-B_{x_i}=\dot{p}_i+H_{x_i}=0 \qquad i=1,\dots,n, \qquad (I.4)$$

где $p_i=\bar{\psi}_{x_i}$ $H=p_i f_i-f_0$ – гамильтониан, а управление $\bar{u}$ находится из п. I теоремы I.I: $\xi=\inf\limits_{u\in U} B$ или $\xi=-\sup\limits_{u\in U} H$.

Напомним еще, что в угловых точках имеют место условия [1]

$$[\psi_t+B]^-=[\psi_t+B]^+, \psi_{x_i}^-=\psi_{x_i}^+ \quad или\ H^-=H^+, p_i^-=p_i^+ \qquad (I.5)$$

Здесь приведен минимум сведений из главы 2./2/, /4/ необходимых для дальнейшего понимания. Некоторые первые результаты по специальным экстремалям, полученные автором в 1960–62 гг. и доложенные на ряде семинаров, изложены в /1/, /2/, /4/, /105/.

§ 2. Особые экстремали

I^0. Условие I теоремы 1.1 в случае непрерывной и дифференцируемой поверхности $B=B(u)$, дает

$$Bu_\beta(t,x,p,u)=0 \qquad \beta=1,\dots,m\le r, \qquad (2.I)$$

где в перечень β включены только те компоненты управления, оптимальные значения которых лежат в открытой области сечений $B=B(u_\beta)$ при данном $t\in[t_1,t_2]$. Без ограничения общности в качестве таковых мы будем считать m – первых компонент[1].

---

[1] Вместо системы (2.I) можно взять систему $Hu_\beta=0$. Мы этим будем пользоваться в дальнейшем. В (2.I) и далее используются обозначения типа $\frac{\partial B}{\partial u_\beta}=Bu_\beta$; $\frac{\partial^2 B}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}=Bu_\beta u_\gamma$; $\frac{\partial H}{\partial u_\beta}=Hu_\beta$; $\frac{\partial f^i}{\partial u_\beta}=f^i u_\beta$ и т.д.

Рассмотрим функциональную матрицу $F=\|Bu_\beta u_\gamma\|$ или, что одно и то же $F_1=\|H_{u_\beta u_\gamma}\|$ $\beta,\gamma=1,\dots,m\le r$.

Определение 2.I. Назовем экстремаль на интервале $t_3t_4\in[t_1,t_2]$ особой, если на этом интервале в некоторой открытой области $U_1\subset U$ и окружающей экстремаль ($\bar u\in U_1$) ранг σ матрицы F (или F_1) меньше m.

Дефект ранга может быть на всей минимали или на отдельных ее участках. Как известно, вариационное исчисление и все известные методы построены в предположении, что экстремали*) не являются особыми (см. например, теоремы 75.I, 80.I в /24/). Однако, случаи когда $\sigma<m$ встречаются довольно часто, например, когда уравнения (I.2) нелинейные, но управление входит линейно. Еще более часто встречаются так называемые скользящие режимы, которые являются частным случаем особых режимов/I/. При $\sigma<m$ из системы уравнений (2.I) становится невозможно определить все u_β.

Определение 2.2. Назовем порядком особенности экстремали число $\mu=m-\sigma$ (дефект ранга матрицы F или F_1).

Определение 2.3. Если $\mu>1$, то будем называть особый режим многократным (2-х, 3-х и т.д. кратным).

Функциональная матрица $F_1=\|H_{u_\beta u_\gamma}\|$ имеет, в частности, дефект в ранге, если некоторые из управлений входят линейно. Например, система (I.I) - (I.2) имеет вид

$$\dot x_i=\gamma_i(t,x,u)+\alpha_j\varphi_{ij}(t,x,u)\quad i=0,1,\dots,n;\ j=1,2,\dots,\lambda\le n+1,\quad I=x_0,\ |\alpha|\le 1. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы будем изучать только систему (2.2). Причем будем считать, что особенность в ранге матрицы F вызывается только χ - первыми управлениями α_j, которые будем называть особыми ($|\alpha|<1,\chi\le\lambda$). Предполагаем также, что правые части уравнений (2.2) дифференцируемы соответствующее число раз.

---

*) Здесь и далее под экстремалью понимается допустимая кривая, удовлетворяющая уравнениям (I.2), (I.4) и условию $I=\inf B$, а под минималью - кривую удовлетворяющую достаточным условиям минимума.

Пусть после S -го дифференцирования выражений $\partial H/\partial\alpha_j=0$ $(j=1,\dots,\varkappa)$ полным образом по t и замены $\dot{x}_i, \dot{\rho}_i$ при помощи (2.2), (I.4) в $d^s/dt^s(H_{\alpha_j})=0$ впервые появилось α_j, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left[\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\neq 0.$$

Далее (см. теор. 2.2) доказано, что для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы S - было четным: $s=2k(k=1,2,\dots,)$.

Определение 2.4. Целое число $K(j)=\frac{1}{2}S(j)$ назовем частным порядком сложности особой экстремали от особого управления α_j.

Определение 2.5. Число $K=\sum_{j=1}^{\varkappa} K(j)$ назовем общим порядком сложности особой экстремали с $\varkappa$ - кратной особенностью.

Определение 2.6. Если $K(j)=1(j=1,\dots,\varkappa)$, то особую экстремаль назовем экстремалью с простой особенностью.

Определение 2.7. Если общий порядок сложности выше порядка особенности ($K>\varkappa$), то такую особую экстремаль будем называть экстремалью со сложной особенностью.

2^0. Рассмотрим необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа неравенств. Для простоты мы ограничимся в п.2^0 выводом этих условий для системы (2.2) вида

$$\dot{x}_i=\gamma_i(t,x)+\alpha_j\varphi_{ij}(x,t) \quad i=0,1,\dots,n;\ j=1,\dots,\lambda\le n+1,\ I=x_0 \qquad (2.2')$$

Теорема 2.I. Пусть $K(i)$ = пост. Для оптимальности многократной особой экстремали со сложной особенностью необходимо, чтобы в каждой точке особого участка за исключением может быть конечного числа угловых точек $x(t)$, была положительна квадратичная форма

$$-(-1)^K\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2K}}{dt^{2K}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta z_{1j}\,\delta z_{1\nu} \quad (\nu,j=1,\dots,\varkappa). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Запишем 2-ю вариацию функционала на участке $\tau_1,\tau_2\subseteq[t_1,t_2]$ при условии $x(\tau_1)=x(\tau_2)=0$. Согласно пп. I,2 теоремы I.I получим $(\Delta J = dJ + \frac{1}{2}d^2J + \dots;\ dJ = 0)$:

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (2H_{\alpha_j x_i}\,\delta\alpha_j\,\delta x_i + H_{x_i x_k}\,\delta x_i\,\delta x_k)\,dt. \qquad (2.4)$$

Уравнения в вариациях от (I.2), (I.4), т.е. от $\dot{x}_i = H_{p_i}$, $\dot{p}_i = -H_{x_i}$ будут

$$\delta\dot{x}_i = H_{p_i x_k}\delta x_k + H_{p_i\alpha_j}\delta\alpha_j,\quad \delta\dot{p}_i = -H_{x_i x_k}\delta x_k - H_{x_i p_k}\delta p_k - H_{x_i\alpha_j}\delta\alpha_j. \qquad (2.5)$$

Продифференцируем выражение $(\delta p_i, \delta x_i)$ по t и подставим (2.5):

$$\frac{d}{dt}(\delta p_i\,\delta x_i) = -H_{x_i x_k}\delta x_i\,\delta x_k - H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\,\delta\alpha_j + H_{p_i\alpha_j}\delta p_i\,\delta\alpha_j. \qquad (2.6)$$

Исключаем $H_{x_i x_k}\delta x_i\,\delta x_k$ из (2.4) при помощи (2.6)

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (H_{\alpha_j x_i}\delta x_i + H_{\alpha_j p_i}\delta p_i)\,\delta\alpha_j\,dt - \delta p_i\,\delta x_i\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \qquad (2.7)$$

Будем обозначать H_{α_j} на проварьированной траектории $\tilde{H}_{\alpha_j}$. Т.к. на экстремали $H_{\alpha_j} = 0$, то

$$H_{\alpha_j x_i}\delta x_i + H_{\alpha_j p_i}\delta p_i = \delta H_{\alpha_j} = \tilde{H}_{\alpha_j} - H_{\alpha_j} = \tilde{H}_{\alpha_j}. \qquad (2.8)$$

Подставим (2.8) в (2.7) и учтем, что $\delta x_i(\tau_1) = \delta x_i(\tau_2) = 0$.

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{H}_{\alpha_j}\,\delta\alpha_j\,dt. \qquad (2.9)$$

Положим $\delta\alpha_j = \delta^k\xi_j$, $\delta^i\xi_j(\tau_1) = \delta^i\xi_j(\tau_2) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$,

где $\delta\xi_j$ – новые вариации. Подставляя в (2.9) и интегрируя по частям k раз, получим

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (-1)^k \left(\frac{d^k}{dt^k}\tilde{H}_{\alpha_j}\right)\delta\xi_j\,dt. \qquad (2.10)$$

Согласно нашего предположения особое управление впервые появилось в $M_{2k}^j = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)$. Найдем величину этого выражения на проварьированной траектории через величины на экстремали. Раскладываем M_{2k}^j в ряд Тейлора:

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\tilde{H}_{\alpha_j} = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta^k\xi_\nu + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta x_i + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta p_i + \dots \qquad (2.11)$$

Если $\tau_1 \tau_2 = \varepsilon$ стремится к нулю, то δx_i, δp_i как видно из (2.5) при $\delta x(\tau_1) = \delta p(\tau_1) = 0$ будут более **высокого порядка малости** относительно ε, чем $\delta^k \xi_j$. Поэтому учитывая, что на экстремали $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} H_{\alpha_j} = 0$ при достаточно малом $\varepsilon = \tau_1 \tau_2$ главным членом в (2.11) будет

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \tilde{H}_{\alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} H_{\alpha_j} \right) \delta^k \xi_\nu , \tag{2.12}$$

где справа берутся значения на экстремали.

Раскладываем коэффициенты при $\delta^k \xi_j$ в (2.12) в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon = \tau_1 \tau_2$, берем только главный член и интегрируем правую и левую часть (2.12) k - раз. Получим

$$\frac{d^k}{dt^k} \tilde{H}_{\alpha_j} = \int_{\tau_1}^{t} \cdots \int_{\tau_1}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) \right] \delta^k \xi_\nu \, d\mu = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) \right]_\tau \delta \xi_\nu , \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2] \tag{2.13}$$

Подставим (2.13) в (2.10):

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (-1)^k \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) \right] \delta \xi_\nu \, \delta \xi_j \, dt = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (-1)^k a_{j\nu} \, \delta \xi_\nu \, \delta \xi_j \, dt, \quad j, \nu = 1, \dots, \chi . \tag{2.14}$$

Т.к. на оптимальной траектории должно быть $2\Delta J \geq 0$, то при $\varepsilon = \tau_1 \tau_2 \to 0$ из (2.14) следует, что в каждой точке особого участка **необходимо, чтобы квадратичная форма (2.3) была положительна. Теорема доказана.**

Теорема 2.2. Необходимое условие оптимальности особой экстремали. Пусть $\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left[\frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) \right]_{\bar{x}} \neq 0 \quad \nu = 1, \dots, \chi .$

Тогда для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы α в $\frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \right) = 0$ входило при m -четном.

Доказательство. Пусть $s = 2r - 1$ - нечетное. В этом случае интегрируем (2.13) по частям $r - 1$ раз и выражение под интегралом в (2.14) примет вид:

$$(-1)^r \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_\nu=(-1)^r a_{j\nu}\,\delta\xi\,\delta\xi_\nu \quad j,\nu=1,\dots,\chi,$$

где $\delta\xi_\nu=\delta\dot{\xi}_\nu, a_{ii}=0$. Пусть все $\delta\dot{\xi}_j$ = 0, кроме $\delta\xi_1, \delta\xi_2$. Тогда выписанное выражение запишется:

$$(-1)^r(a_{12}\,\delta\dot{\xi}_1\,\delta\xi_2+a_{21}\,\delta\dot{\xi}_2\,\delta\xi_1).$$

Полагая $\delta\xi_2=\delta\dot{\xi}_2=0$, т.е. $\delta\xi_2=K_2$ – постоянной, будем иметь: $(-1)^r a_{21}\delta\xi_1 K_2$. По условию $a_{21}\neq 0$. Выбирая $\delta\xi_1 K_2$, так чтобы $(-1)^r a_{21}\delta\xi_1 K_2<0$ получим согласно (2.14), $\Delta J<0$. А это противоречит оптимальности особой экстремали. Аналогичные рассуждения применимы к любому коэффициенту $a_{j\nu}$. Теорема доказана[1)]

Замечание 2.1. Выполнения заключения теоремы можно добиться, если $a_{\nu j}$ есть функция X и на особой экстремали можно наложить дополнительную связь $a_{\nu j}(t,X)=0$. Тогда α, появившееся в $d^m/dt^m(H_{\alpha_j})=0$, при нечетном m из этого выражения исчезнет.

Пример 2.1. Найти особые экстремали задачи

$$I=\int_0^{3\pi}\cos X\,dt,\quad \dot{x}=\alpha,\quad |\alpha|\leq 1.$$

Имеем: $H=p\alpha-\cos X$, $\dot{p}=-\sin X$, $H_\alpha=p=0$, $\dot{H}_\alpha=-\sin X=0$, $X=K\pi$

$$(K=0,\pm 1,\pm 2,\dots),\quad \ddot{H}_\alpha=-\alpha\cos X=0,\quad \alpha=0.$$

Неравенство $\partial\ddot{H}_\alpha/\partial\alpha=-\cos X>0$ имеет место только при $X=m\pi$ $(m=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\dots)$. Таким образом особые экстремали $X=m\pi(m=\pm 1,\pm 3,\dots)$ – оптимальны, а особые экстремали $X=n\pi$ $(n=0,\pm 2,\pm 4,\dots)$ – неоптимальны.

Пример 2.2. $I=\int_0^T(\alpha_1 X_2+\alpha_2 X_1)dt$, $\dot{X}_1=\alpha_1$, $\dot{X}_2=2\alpha_2$, $X(0)=X(T)=0$,

---

1) В работе /44/ громоздкими рассуждениями доказывается, что в простейшем случае $j=1$ (одно особое управление) α впервые появиться в $\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)$ при четном S. Однако в общем случае $j\geq 2$, очевидно это не так, как видно из примера 2.2.

$$H = p_1\alpha_1 + 2p_2\alpha_2 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1, \quad \dot{p}_1 = \alpha_2, \ \dot{p}_2 = \alpha_1,$$

$$H_{\alpha_1} = p_1 - x_2 = 0, \quad \dot{H}_{\alpha_1} = -\alpha_2 = 0,$$

$$H_{\alpha_2} = 2p_2 - x_1 = 0, \quad \dot{H}_{\alpha_2} = \alpha_1 = 0.$$

Особая экстремаль $x = p = \alpha = 0$ – неоптимальна, ибо $\alpha (\nu \neq j)$ – появились при нечетном дифференцировании, $a_{12} = -1, a_{21} = 1$ и не могут быть равны нулю.

Замечание 2.2. Можно показать, что для более общей системы (2.2) имеет место:

Теорема 2.I'. Необходимое условие оптимальности особой экстремали с общим порядком сложности K и порядком особенности χ.

Пусть $\kappa(i)$ = пост. Для оптимальности многократной особой экстремали со сложной особенностью необходимо, чтобы в каждой точке особого участка за исключением может быть конечного числа угловых точек $x(t)$, была положительная квадратичная форма

$$-(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_\nu - 2(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta u_\beta\,\delta\xi_j - \frac{\partial^2 H}{\partial u_\beta\,\partial u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma \quad (2.15)$$

$$(\nu, j = 1, \ldots, \chi; \quad \beta, \gamma = 1, \ldots, m).$$

Для случая простой особенности (κ = I) этот результат был опубликован в /2/ стр. I28 примерно за год до того, как он был опубликован в /45/. Он докладывался на ряде семинаров в I963-65 гг. и, в частности, на конференции мехмата университета им. П.Лумумбы в мае I965 г. Это признано автором работы /45/ (см. /46/). Еще более общие необходимые условия оптимальности типа равенств и неравенств опубликованы автором в работе /4/, которая была сдана в печать раньше чем /45/.

Для случая одного управления и κ = I, теорема 2.3 также изложена в /2/. Из теоремы 5 в /2/ как частный случай следует условие Келли[I] /43/. Вообще случай $\chi = 1$ рассмотрен в /2/ подробно (см. также /I/). Установлены необходимые условия типа неравенств и частично равенств, для особых и скользящих экстремалей, порядок вырождения вариационной задачи, способ вычисления особого управления и т.п.

Из теоремы 2.2, как частный случай, следует необходимое условие оптимальности (если положить $\delta u = 0$), полученное в /44/ для однократного $(j, \nu = 1)$ особого режима, а именно

$$a_{11} = -(-1)^{k}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Big[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\Big(\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}\Big)\Big] \geq 0. \qquad {}^{2)}$$

На простом <u>примере 2.3</u>:

$$x_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (x_1^2 + 4x_1 u + u^2)dt,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \alpha,\ x_i(t_j) = 0,\ i,j = 1,2,\ x_0(1) = min$$

покажем, что на особых экстремалях условие теоремы 2.I' является более сильным, чем условие, полученное в /44/ и принцип максимума. В самом деле

$$H = p_1 x_2 + p_2\alpha - \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_1 u + u^2),\ \dot{p}_1 = x_1 + 4u,\ \dot{p}_2 = -p_1,$$
$$H_u = -2x_1 - u = 0,\ H_{uu} = -1 \leq 0,\ H_\alpha = p_2 = 0,\ H_\alpha^{(1)} = -p_1 = 0,$$
$$H_\alpha^{(2)} = -x_1 - 4u = 0,\ H_\alpha^{(3)} = -x_2 - 4\dot{u} = 0,\quad H_\alpha^{(4)} = -\alpha - 4\ddot{u} = 0.$$

Отсюда следует, что особая экстремаль есть $x_1 = x_2 = u = \alpha = 0$. Условие /44/ $a_{11} = 1 \geq 0$ и принцип максимума $H_{uu} = -1 \leq 0$ – выполнены. Однако квадратичная форма (2.I3) $\delta\xi_1^2 + 2\cdot 4\delta\xi_1\delta u + \delta u^2$ не положительна. Легко показать, что минимума найденная особая экстремаль не сообщает. Возьмем $x_1 = -u$. Тогда $x_0 = -\int_0^1 x_1^2 dt$. Следовательно, в сколь угодно малой окрестности $x \equiv 0$ есть

I) В первой половине I964 г. автором была предложена редакции А и Т статья, которая, в частности, содержала условие Келли.

2) Знак нашего неравенства противоположен знаку в /44/, т.к. мы максимизируем гамильтониан H.

"лучшая" кривая и найденная особая экстремаль не дает даже слабого минимума.

3^0. Рассмотрим еще некоторые необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа неравенств и равенств.

<u>Замечание 2.3.</u> Если в некоторой квадратичной форме ($i,j=1,\dots,n$) коэффициент $a_{ii}=0$, то для положительности ее необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты $a_{ij}=0$ ($j=1,\dots,n$).

В самом деле положим все η_j, для которых $j\neq i$, $j\neq k$, равными нулю. Получим форму: $2a_{ik}\eta_i\eta_k+a_{kk}\eta_k^2$ (по i,k - не сумма). Но эта форма может быть положительной только в том случае, если $a_{ik}=0$. Замечание 2.3 доказано.

Согласно теоремы I.I п. I имеем

$$\delta\xi(t,x)=-H_{\alpha_j u_\beta}\delta\alpha_j\,\delta u_\beta-H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma .$$

Из $\delta\xi\geqslant 0$ и замечания 2.3 следует, что для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы $H_{\alpha_j u_\beta}=0$, а квадратичная форма $-H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma$ была не отрицательна.

Запишем теперь 2-ю вариацию функционала на особой экстремали с учетом п.п. I,2 теоремы I.I и уравнений (1.2) в вариациях

$$2\Delta J=-\int_{t_1}^{t_2}(H_{x_i x_k}\delta x_i\delta x_k+2H_{x_i u_\beta}\delta x_i\,\delta u_\beta+2H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\,\delta\alpha_j+ \tag{2.I6}$$
$$+2H_{\alpha_j u_\beta}\delta\alpha_j\,\delta u_\beta+H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma)\,dt,$$

$$\delta\dot x_i=f^i_{x_k}\delta x_k+f^i_{u_\beta}\delta u_\beta+f^i_{\alpha_j}\delta\alpha_j\,,\quad i,k=1,\dots,n; \tag{2.I7}$$
$$\beta,\gamma=1,\dots m;\quad j=1,\dots,\chi.$$

Возьмем в окрестности некоторого момента $\tau\in(\tau_1,\tau_2)$, где $\tau_1\tau_2$ - участок особой экстремали, вариацию $\delta\alpha_j(t)$, изображенную на фиг. б.Iа, а вариацию $\delta u_\beta(t)$ - изображенную на фиг. б.Iв. Пусть длина участка ε достаточно мала (фиг. б.I).

Найдем изменение вариаций $\delta x_i(t)$ на участке ε , пренебрегая членами более высокого порядка малости относительно ε . Пологаем $\delta x_i(\tau-\varepsilon/2)=0$. Раскладывая коэффициенты в правой части (2.I7) в ряд по $(t-\tau)$ перепишем (2.I7) в виде

$$\delta\dot{x}_i = f^i_{x_k}\delta x_k + f^i_{u_\beta}\delta u_\beta + f^i_{\alpha_j}\delta\alpha_j + \dot{f}^i_{x_k}\cdot(t-\tau)\delta x_k + \dot{f}^i_{u_\beta}\cdot(t-\tau)\delta u_\beta + \dot{f}^i_{\alpha_j}\cdot(t-\tau)\delta\alpha_j .$$

Найдем максимальное отклонение $\delta x_i(t)$ с учетом $\delta x_i(\tau-\varepsilon/2)=0$.

I) От $\delta\alpha_j$ $\quad \delta x_{1i} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2} f^i_{\alpha_j} K_j\, dt = f^i_{\alpha_j} K_j \varepsilon^2$ (фиг.6.Iв)

2) От δu_β и δx_{1i} в точке τ

$$\delta x_{2i} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau}(f^i_{x_k}\delta x_k + f^i_{u_\beta}\delta u_\beta)\,dt = f^i_{x_k}\underbrace{f^k_{\alpha_j}K_j\varepsilon^2}_{\delta x_{1i}}\frac{\varepsilon}{2} + f^i_{u_\beta}\underbrace{L_\beta\varepsilon^2}_{\delta u_\beta}\frac{\varepsilon}{2} = f^i_{x_k} f^k_{\alpha_j} K_j\frac{\varepsilon^3}{2} + f^i_{u_\beta} L_\beta\frac{\varepsilon^3}{2} .$$

(фиг. 6.1г)

3) От $\delta\alpha_j$, но более высокого порядка малости

$$\delta x_{3i} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau}\dot{f}^i_{\alpha_j}\cdot(t-\tau)\delta\alpha_j\,dt = \dot{f}^i_{\alpha_j}\cdot\frac{1}{2}(t-\tau)^2\Big|_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2} K_j = -\dot{f}^i_{\alpha_j}\frac{\varepsilon^3}{2}K_j . \qquad \text{(фиг.6.Iд)}$$

Полное изменение вариации δx_i с точностью до ε^3 будет

$\delta x_i = \delta x_{1i} + \delta x_{2i} + \delta x_{3i} = \delta x_{1i}(\varepsilon^2) + \Delta x_i(\varepsilon^3)$, где $\Delta x_i = \delta x_{2i}(\varepsilon^3) + \delta x_{3i}(\varepsilon^3)$.

Оценим отдельные члены (2.I6) Прежде всего для положительности квадратичной формы под интегралом в (2.I6) необходимо, чтобы $H_{\alpha_j u_\beta}=0$, т.к. отсутствует член с $\delta\alpha_j^2$. Пусть это условие выполнено. Оценим остальные члены в (2.I6) на ($\tau-\varepsilon/2$, $\tau+\varepsilon/2$).

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} H_{x_i x_k}\delta x_i\delta x_k\,dt = H_{x_i x_k} f^i_{\alpha_j} f^k_{\alpha_\nu}\big|_\tau K_j K_\nu \varepsilon^5 ,\\
&\text{б)} \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i u_\beta}\delta x_i\delta u_\beta\,dt = 2H_{x_i u_\beta} f^i_{\alpha_j}\big|_\tau K_j L_\beta \varepsilon^5 , \qquad (2.\text{I}8)\\
&\text{в)} \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma\,dt = H_{u_\beta u_\gamma}\big|_\tau L_\beta L_\gamma \varepsilon^5 .
\end{aligned}$$

Вычислим следующий наиболее сложный интеграл

$$\text{г)} \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{подст. }\delta x_i}}{\delta x_i}\delta\alpha_j\,dt = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{раскл. в ряд}\\ \text{по }(t-\tau)}}{H_{x_i\alpha_j}}\delta x_{1i}\delta\alpha_j\,dt + \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\delta\alpha_j\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\delta x_{1i}\delta\alpha_j\,dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\dot{H}_{x_i\alpha_j}\cdot(t-\tau)\delta x_{1i}\delta\alpha_j\,dt}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\delta\alpha_j\,dt}_{\text{III}} .$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. I =0 - как интеграл от произведения четной $\delta\alpha_j(t)$ и нечетной функции $\delta x_{1i}(t)$ по симметричному промежутку

$$\text{II} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\dot{H}_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\cdot(t-\tau)\delta x_{1i}\delta\alpha_j\,dt = 2\dot{H}_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\Big(2\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon/2}(t-\tau)\delta x_{1i}\delta\alpha_j\,dt\Big) =$$

$$= 2\dot H_{x_i\alpha_j}\Big|_\tau \cdot 2\Big[\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}(t-\tau)\underbrace{(-\tfrac{1}{2}f^i_{\alpha_j}K_j\varepsilon^2)}_{\delta x_{2i}}\underbrace{(-K_j)}_{\delta\alpha_j}dt + \int_{\tau+\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2}^{\tau+\frac{\varepsilon}{2}}(t-\tau)(-\tfrac{1}{2}f^i_{\alpha_\kappa}K_\kappa\varepsilon^2)(K_j)dt\Big] =$$

$$= 2\dot H_{x_i\alpha_j}\Big|_\tau \cdot 2(-\tfrac{1}{4}f^i_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5) = -\dot H_{x_i\alpha_j}f^i_{\alpha\kappa}\Big|_\tau K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

$$\underline{\text{III}} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}2H_{x_i\alpha_j}\,\Delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt = 2H_{x_i\alpha_j}\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}(\delta x_{2i}+\delta x_{3i})\delta\alpha_j\,dt = 2H_{x_i\alpha_j}\Big(\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\underbrace{\delta x_{2i}\delta\alpha_j}_{\text{четная}}dt +$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\delta\alpha_j\,dt\Big) = 4H_{x_i\alpha_j}\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\delta x_{2i}\delta\alpha_j\,dt + 2H_{x_i\alpha_j}\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\delta\alpha_j\,dt.$$

Вычислим каждый из этих интегралов

$$\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\delta x_{2i}\delta\alpha_j\,dt = \int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\Big(f^i_{x_p}f^p_{\alpha_\kappa}K_\kappa\frac{\varepsilon^3}{2} + f^i_{u_\beta}L_\beta\frac{\varepsilon^3}{2}\Big)(-K_j)dt = -f^i_{x_p}f^p_{\alpha\kappa}\Big|_\tau K_\kappa K_j\frac{\varepsilon^5}{2} - f^i_{u_\beta}\Big|_\tau L_\beta K_j\frac{\varepsilon^5}{2}$$

$$\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\delta\alpha_j\,dt = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2}\tfrac{1}{2}(-\dot f^i_{\alpha\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa)K_j\,dt + \int_{\tau-\varepsilon^2}^{\tau+\varepsilon^2}(-\dot f^i_{\alpha\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa)(-K_j)2dt +$$

$$+\int_{\tau+\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2}^{\tau+\varepsilon/2}\tfrac{1}{2}(-\dot f^i_{\alpha\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa)K_j\,dt = -\tfrac{1}{4}\dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 + \dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - \tfrac{1}{4}\dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 = \tfrac{1}{2}\dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

Подставляя их получим

$$\underline{\text{III}} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\delta\alpha_j\,dt = -2H_{x_i\alpha_j}f^i_{x_p}f^p_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - 2H_{x_i\alpha_j}f^i_{u_\beta}L_\beta K_j\varepsilon^5 + H_{x_i\alpha_j}\dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5$$

Итак интеграл г) равен

$$\text{г)}\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}2H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\delta\alpha_j\,dt = -\dot H_{x_i\alpha_j}f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - 2H_{x_i\alpha_j}f^i_{x_p}f^p_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 -$$
$$- 2H_{x_i\alpha_j}f^i_{u_\beta}L_\beta K_j\varepsilon^5 + H_{x_i\alpha_j}\dot f^i_{\alpha\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

Подставляя найденные интегралы а),б),в),г) в (2.I6) получим квадратичную форму

$$\tfrac{1}{2}d^2J = (a_{j\nu}K_\nu K_j + 2b_{i\beta}K_iL_\beta - H_{u_\beta u_\gamma}L_\beta L_\gamma)\,\varepsilon^5$$
$$\nu, j = 1,\dots,r;\quad \beta,\gamma = 1,\dots,m, \tag{2.I9}$$

$$a_{j\nu}K_\nu K_j + 2b_{i\beta}K_iL_\beta - H_{u_\beta u_\gamma}L_\beta L_\gamma,$$

где

$$a_{ij} = -H_{x_ix_p}f^i_{\alpha_j}f^p_{\alpha_\nu} + 2H_{x_i\alpha_j}f^i_{x_p}f^p_{\alpha\nu} + \dot H_{x_i\alpha_j}f^i_{\alpha\nu} - H_{x_i\alpha_j}\dot f^i_{\alpha\nu},$$

$$b_{j\beta} = H_{x_i\alpha_j}f^i_{u_\beta} - H_{x_iu_\beta}f^i_{\alpha_j}\qquad i,p = 1,2,\dots,n.$$

Откуда в силу $d^2J \geq 0$ и произвольности K, L следует

<u>Теорема 2.3.</u> Пусть $\kappa(i)$ = пост. Для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы почти всюду была положительна квадратичная форма (2.I9).

Если $a_{jj} = 0$, то по замечанию 2.3 все $a_{j\nu} = b_{j\beta} = 0$. В этом случае можно применить вариации более сложной структуры (рис. 5.2) и т.д. Пусть все $H_{x_i \alpha_j} \equiv 0$. Это будет, если, например, система (2.2) имеет вид

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t,x,u) + \alpha_j \varphi_{ij}(t,u), \; i = 0,1,\dots,n; \; j = 1,\dots, \; \lambda \leq n. \qquad (2.20)$$

В этом случае повторяя все рассуждения нетрудно показать, что в общем случае особой экстремали κ-го порядка сложности (k = пост) коэффициенты $a_{j\nu}$, $b_{j\beta}$ в (2.I9) имеют вид

$$a_{j\nu} = -H_{x_i x_p} \underbrace{f^i_{x_\tau} f^\tau_{x_a} \dots f^b_{x_m}}_{\kappa} \underbrace{f^m_{\alpha_j} f^p_{x_c} f^c_{x_d} \dots f^e_{x_e}}_{\kappa} f^l_{\alpha_\nu}; \quad b_{j\beta} = -H_{x_i u_\beta} f^i_{x_\tau} f^\tau_{x_a} \dots f^b_{x_m} f^m_{\alpha_j},$$

по $i, p, \tau, a, b, m, c, d, e, l = 1,\dots,n$ - сумма $j, \nu = 1,\dots,\chi$, $\beta = 1,\dots,m$.

Если κ нам неизвестно, то последовательно вычисляем $a_{j\nu}$ при κ = 0,I,2 ... пока не получим $a_{jj} \neq 0$.

Квадратичная форма (2.I9) более удобна для пользования, чем (2.I5), ибо она сразу дает выражение коэффициентов формы через параметры системы.

4^0. <u>Теорема 2.4. Необходимые условия оптимальности особой экстремали типа равенств.</u> Пусть $\kappa(i)$ = пост. Для оптимальности особой экстремали необходимо выполнения равенств[I)]

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \; \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right) = 0; \; \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \; \frac{d^\tau}{dt^\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\right\} = 0; \qquad (2.21)$$

$$\gamma = 0,1,\dots,\kappa-1; \; m = 0,1,\dots,2\kappa-1; \; \nu, j = 1,\dots,\chi; \; \beta = 1,\dots,m; \; \tau = 1,\dots,\theta(\nu,j)-1.$$

Здесь последние выражения дифференцируются до появления в них α. Считается, что это произойдет при $\theta(\nu,j)$ -дифференцировании.

I) Принято, что $\dfrac{d^0}{dt^0}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \alpha}\right) = \dfrac{\partial H}{\partial \alpha}$.

Доказательство: Т.к. по предположению все $\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0$, когда $m<2\kappa$, то из замечания 2.3, теоремы 2.3 и (2.15) следует I-я группа равенств (2.21). Вторая группа очевидна, если вспомнить, что на особой экстремали $H_{\alpha_j}=0$.

Докажем теперь 3-ю группу равенств. Варьируя функционал как мы это делали при доказательстве теоремы 2.2, получим (2.9). Рассмотрим два случая:

а) Число m - четное, $m=2\tau<2\kappa$. Тогда можно записать (2.14), в котором $\kappa=\tau$. Но ввиду отсутствия в этой форме членов с $\delta\xi_j^2$ получим, что для $\Delta J\geqslant 0$ необходимо, чтобы

$$a_{j\nu}=\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\tau}}{dt^{2\tau}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0.$$

б) Число m - нечетное, $m=2\tau-1<2\kappa$. В этом случае интегрируем (2.13) по частям $\tau-1$ раз и выражение под интегралом в (2.14) примет вид:

$$(-1)^\tau\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\tau-1}}{dt^{2\tau-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_{\tau_j}\,\delta\xi_{\tau_\nu}=(-1)^\tau a_{j\nu}\,\delta\xi_{\tau_j}\,\delta\xi_{\tau_\nu},\quad j,\nu=1,\ldots,\chi, \qquad (2.22)$$

где $\delta\xi_{\tau_\nu}=\delta\dot\xi$, $a_{ii}=0$. Пусть все $\delta\xi_{\tau_j}=0$, кроме $\delta\xi_{\tau_1}$, $\delta\xi_{\tau_2}$. Тогда (2.22) запишется: $a_{12}\delta\xi_{\tau_1}\delta\xi_{\tau_2}+a_{21}\delta\xi_{\tau_2}\delta\xi_{\tau_1}$. Полагая $\delta\xi_{\tau_2}=\delta\dot\xi_{\tau_2}=0$, т.е. $\delta\xi_{\tau_2}=\kappa_2$ - постоянной, будем иметь: $a_{21}\delta\xi_{\tau_1}\kappa_2$ и для $\Delta J\geqslant 0$ необходимо, чтобы $a_{21}=0$. Аналогично можно показать, что все остальные $a_{j\nu}=0$. Четвертая группа равенств очевидна, ибо это есть 3-я группа, дифференцируемая на особой экстремали по t до появления в ней α. Теорема доказана.

Заметим, что все выражения (2.21) не содержат α. Для первых 2-х групп это следует из третьей группы, ибо третья группа представляет собой коэффициенты при α в выражениях первых 2-х групп, а четвертая группа в силу своего построения.

Первые общие условия типа равенств были получены в /1/, /2/. Ряд новых условий для многократного режима с простой особенностью была найдена в /45/. Однако в /45/ не было замечено, что даже в случае простой особенности должны еще выполняться равенства 1-ой и 4-ой группы (2.21).

Покажем, что эти равенства существенны.

Пример 2.4. Найти минимум в задаче

$$I=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}u^2+u\alpha\right)dt,\ \dot{x}=\alpha,\ |\alpha|\le N,\ x(0)=x(1)=0.$$

Решение

$$H=p\alpha-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}u^2-u\alpha,\ \dot{p}=x,\ H_u=-u-\alpha=0,\ H_{uu}=-1<0,$$

$$H_\alpha=p-u=0,\ \dot{H}_\alpha=x-\dot{u}=0,\ \ddot{H}_\alpha=\alpha-\ddot{u}=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\ddot{H}_\alpha=1>0.$$

Этим уравнениям удовлетворяет экстремаль $x=u=\alpha=p=0$, на которой все необходимые условия выполнены и $I=0$. Однако $H_{\alpha\bar{u}}=1$ и необходимое условие (2.21): $H_{\alpha u}=0$ - не выполнено. И действительно, если интервал интегрирования разделить на $2n$ частей и положить

$$\alpha=\begin{cases}N & \text{, если участок четный,}\\ -N & \text{, если участок нечетный,}\end{cases}$$

а $u=-\alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty} I=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}N^2-N^2\right)dt=-\tfrac{1}{2}N^2$$

и с ростом N, $\inf I\to-\infty$.

Обозначим независимые относительно x и p равенства (2.21) через

$$M_\delta=0\quad(\delta=1,2,\dots,\tau\le 2n). \tag{2.23}$$

Теорема 2.5. О порядке вырождения особой экстремали. Если матрица $\|\partial M_\delta/\partial z_\gamma\|$, $z=\{x,p\}$ имеет ранг $\tau\le 2n$, то на особой экстремали имеют место τ равенств (2.23) и вариационная задача вырождается не менее, чем на τ единиц.

Доказательство: т.к. якобиан системы $M_\tau = 0$ относительно переменных x, p имеет ранг τ, то τ функций $x(t), p(t)$ могут быть найдены без интеграций, а τ соответствующих дифференциальных уравнений вариационной задачи могут быть на особой экстремали отброшены. Теорема доказана. Если же $\tau > 2n$, то система переопределена и данная особая экстремаль невозможна.

Пример 2.5.

$$I = \int_0^T \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1)^2\right]dt,\ \dot{x}_1 = \alpha_1,\ \dot{x}_2 = \alpha_2,\ |\alpha_1| \le 1,\ |\alpha_2| \le 1,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = 0;\quad T > 0.$$

Решение:

$$H = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 - \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1)^2\right],$$

$$\dot{p}_1 = x_1 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1),\quad \dot{p}_2 = x_2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1),$$

$$H_{\alpha_2} = p_2 = 0,\ \dot{H}_{\alpha_2} = x_2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1) = 0,$$

$$H_{\alpha_1} = p_1 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 1)^2 = 0,\quad \dot{H}_{\alpha_1} = x_1 - \alpha_2(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

Согласно (2.21) имеем систему $x_1 + x_2 + 1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0.$

Эта система несовместна. Поэтому 2-х кратная особая экстремаль здесь невозможна.

5^0. Рассмотрим условия входа на особую экстремаль. Пусть система имеет вид (2.2') $j = 1$ и t_4 – момент входа. Установим знак H_α в момент $t_3 < t_4$. Предположим, что разность $t_4 - t_3 = -\varepsilon$ мала. Разложим $M = H_\alpha$ в ряд Тейлора по $(t_3 - t_4)$:

$$M(t_3) = \bar{M}(t_4) + \frac{dM}{dt}\bigg|_{t_4}(t_3 - t_4) + \frac{d^2M}{dt^2}\bigg|_{t_3}\frac{(t_3 - t_4)^2}{2!} + \ldots + \frac{d^nM}{dt^n}\bigg|_{t_3}\frac{(t_3 - t_4)^n}{n!} + \ldots \quad (2.24)$$

Пусть впервые α появилось в (2.24) при $n = 2k$. Меняя местами t_3, t_4, получим

$$M(t_3) \approx (-1)^{2k}\frac{d^{2k}M}{dt^{2k}}\bigg|_{t_3}\frac{(t_4 - t_3)^{2k}}{2k!} \quad (k \ge 1), \qquad (2.25)$$

где $$\frac{d^{2k}M}{dt^{2k}}\Big|_{t_3} = \frac{d^{2k}H_{\alpha_j}}{dt^{2k}}\Big|_{t_3} = [a(t,x,p)+\alpha\, b(t,x,p)]\Big|_{t_3}. \quad (2.26)$$

Из п. 2 (~~...~~) теоремы 2.I (или $\sup H$) вытекает: для входа необходимо, чтобы $\alpha = \alpha_{max}$ при $H_\alpha > 0$ и $\alpha = \alpha_{min}$ при $H_\alpha < 0$. Т.к. $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$, то

$$[a+\alpha_{max}\, b\,]_{t_3} > 0, \quad [a+\alpha_{min}\, b]_{t_3} < 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]_{t_3} > 0, \quad k \geqslant 1. \quad (2.27)$$

Сравнивая с необходимым условием оптимальности (2.3), которое для j = I принимает вид

$$-(-1)^k \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] \geqslant 0, \quad (2.28)$$

видим, что эти два условия могут быть совместны только когда k -нечетные. Если же k- четные, то (2.27), (2.28) - противоречат друг другу и вход (и сход) с непрерывным $p(t)$ или с определенным $\bar{u}(t)$- невозможен.

Определение 2.8. Вход и сход, когда значения $u(t)$ слева при входе (и справа при сходе) определены и непрерывны, назовем регулярным входом (сходом) с особой экстремали.

Мы рассмотрели систему (2.2') и случай одного особого управления. Однако очевидно, что в более общем случае системы (2.2), если только вход не происходит одновременно по нескольким особым управлениям, приведенное ранее утверждение будет справедливо. В самом деле фиксируя все $u(t)$, $\alpha(t)$ кроме $\alpha_j(t)$, мы очутимся в условиях п. 5^0 и, следовательно, будет справедливо (2.27), а следовательно и вывод, что регулярный вход с непрерывным $p(t)$ возможен только при k- нечетном.

Теорема 2.6. Условие регулярного входа на особую экстремаль. Пусть $\kappa(i)$-нечетное. Регулярный вход в особый режим оптимален только в том случае, если в момент входа t_3-0 выполнены равенства (2.2I). При этом все $p_i(t)$ остаются непрерывными.

Доказательство. Так как по условию задачи $x(t)$ непрерывны, то из угловых условий (I.5) следует, что для оптимальности особой экстремали в районе угловой точки необходимо, чтобы $p^-=p^+, H^-=H^+$. Поскольку на оптимальной особой экстремали имеют место тождества (2.2I), то в силу непрерывности $t, x(t), p(t)$ получаем, что выражения (2.2I) равны нулю и при t_3-0 Теорема доказана.

Сход с особого режима произойдет, если найдется такое сколь угодно малое $\varepsilon>0$, что при $t=t_4+\varepsilon$ (t_4- момент схода) будут иметь место неравенства: $H_\alpha>0$, если $\alpha>\alpha_{особ}$ и $H_\alpha<0$ если $\alpha<\alpha_{особ}$. В этом случае по условию $\sup_\alpha H$ траектория не будет снова отброшена на особый режим. Случай, когда в окрестности особой экстремали имеет место строгое неравенство $H_\alpha \gtrless 0$ будем называть гарантированным сходом.

Теорема 2.7. Условие регулярного схода. Пусть $j=1$, κ- нечетное, а особая экстремаль в точке схода $t_4\in(t_1,t_2)$ непрерывна и дифференцируема 2κ раз. Для того, чтобы имел место гарантированный сход с особой экстремали при $t=t_4$ необходимо и достаточно, чтобы в точке

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]_{t_4}>0. \qquad (A)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть сход возможен. Тогда существует такое сколь угодно малое $\varepsilon>0$, что в момент $t_4+\varepsilon$ при $\alpha>\alpha_{особ}$ величина $H_\alpha>0$ и при $\alpha<\alpha_{особ}$ величина

$H_\alpha<0$. Подставим при $t=t_4$ в H_α x,u,p как функции t и исследуем приращение H_α в момент $t=t_4+\varepsilon$ при отклонении α от $\alpha_{особ}$. Разложим H_α в ряд Тейлора (2.24). Т.к. по условию α содержит только члены ряда начиная с $n=2k$, то приращение $H_\alpha=M$ при отклонении α от $\alpha_{особ}$ зависит целиком от члена $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)$ в (2.24). Но в силу (2.2) α в этом член может войти только линейно. Поскольку $H_\alpha>0$ при $\alpha>\alpha_{особ}$ и $H_\alpha<0$ при $\alpha<\alpha_{особ}$ и экстремаль дифференцируема $2k$ - раз, то должно иметь место (A_2).

Достаточность. Пусть (А) имеет место. Т.к. α входит в $G=\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)$ линейно и $G(\alpha_{особ})=0$, то при $\alpha>\alpha_{особ}$ выражение $G>0$, а при $\alpha<\alpha_{особ}$, $G<0$. Следовательно, можно найти такое достаточно малое ε, что

$$H_\alpha=\int_0^t\ldots\int_0^\varepsilon G\,dt^{2k}$$

будет больше 0 при $\alpha>\alpha_{особ}$ и будет меньше 0 при $\alpha<\alpha_{особ}$, ибо $G>0$ в первом случае и $G<0$ - во втором. Таким образом возможность схода обеспечена. Теорема доказана.

6°. Рассмотрим условия входа на особую экстремаль с порядком особенности два, когда система (2.2') имеет вид

$$I=\int_{t_1}^{t_2}[f_0(x)+c_0u]\,dt,\quad \dot{x}_1=f_1(x)+c_1u,\quad \dot{x}_2=f_2(x)+c_2u\quad |u|\leq 1. \qquad (2.29)$$

Определение 2.9. Назовем вход на особую экстремаль осциллирующим входом, если при приближении к особой экстремали число переключений неограниченно возрастает[I)].

Пример: вход на экстремаль $x=0$ с управлением $u=\operatorname{sign}\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ будет осциллирующим.

I) В результате значение $u^-(t)$ - слева при входе становится неопределенным.

Теорема 2.8. Пусть система с одним управлением ($r=1$), описывается уравнениями (2.29) и содержит оптимальную особую экстремаль с порядком сложности два.

Тогда в достаточно малой окрестности особой экстремали оптимальный вход на особую экстремаль будет осциллирующим (фиг. 6.3) и линией переключения будет кривая вида

$$x_1+\kappa_1 x_2+\kappa_2 x_2\,|x_2|=0, \quad \kappa_1,\kappa_2 - пост. \tag{2.30}$$

Доказательство. Примем момент входа t за ноль отсчета. В достаточно малой окрестности особой экстремали (2.29) можно в первом приближении записать

$$\begin{gathered}\delta I=\frac{1}{2}\int_t^0(\bar{a}_{ij}\,\delta x_i\,\delta x_j+c_0 u)\,dt,\ \delta x_1(0)=\delta x_2(0)=0,\ |u|\leq 1,\\ \delta\dot{x}_1=\bar{b}_{11}\delta x_1+\bar{b}_{12}\delta x_2+c_1 u,\quad \delta\dot{x}_2=\bar{b}_{21}\delta x_1+\bar{b}_{12}\delta x_2+c_2 u,\end{gathered} \tag{2.31}$$

где $\bar{a},\bar{b}$ - функции t, δx_i - отклонение x_i от особой экстремали. Разложим коэффициенты $\bar{a},\bar{b}$ в ряд Тейлора, по степеням $\varepsilon=(t,0)$ и ограничимся только первым членом этого ряда. Тогда $\bar{a},\bar{b}$ в достаточно малой окрестности момента входа с точностью до величин более высокого порядка малости можно считать постоянными.

Введем в (2.31) новые переменные путем неособого преобразования:

$$\delta y_0=\delta I-(c_0/c_1)\delta x_1,\quad \delta y_1=\delta x_1-(c_1/c_2)\,\delta x_2. \tag{2.32}$$

Тогда управление будет входить только в последнее уравнение (2.31)

$$\delta y_0=\frac{1}{2}\int_t^0(\tilde{a}_{11}\delta y_1^2+2a_{12}\,\delta y_1\,\delta x_2+a_{22}\delta x_2^2)\,dt, \tag{2.33}$$

$$\delta\dot{y}_1=b_{11}\delta y_1+b_{12}\delta x_2,\quad \delta\dot{x}_2=b_{21}\delta y_1+b_{12}\delta x_2+c_2 u.$$

У особой экстремали с порядком сложности два $a_{22}=0$. Вводя в (2.33) новую переменную

$$\delta z_0=\delta y_0+(2a_{12}/b_{12})\,\delta y_1^2 \tag{2.34}$$

придем к системе

$$\delta z_0=\frac{1}{2}\int_k^0 a_{11}\,\delta y_1^2\,dt,\quad \delta \dot y_1=b_{11}\delta y_1+b_{12}\delta x_2,\quad \delta \dot x_2=b_{21}\delta y_1+b_{22}\delta x_2+c_2u \qquad (2.35)$$

Причем из (2.32), (2.34) следует, что минимум в новой системе будет соответствовать минимуму в старой системе и вследствии оптимальности особой экстремали $a_{11}>0$.

Т.к. $\delta I(0)=\delta x_1(0)=\delta x_2(0)=0$, то $\delta z_0(0)=\delta y_1(0)=\delta x_2(0)=0$ и на достаточно малом участке $\varepsilon(t,0)$ величина δy_1, как видно из (2.35), будет более высокого порядка малости относительно ε, чем δx_2. Аналогично δx_2 – величина более высокого порядка малости по сравнению с u. Поэтому пренебрегая членом $b_{11}\delta y_1$ во 2-ом уравнении и членами $b_{21}\delta y_1+b_{22}\delta x_2$ в 3-ем уравнении (2.35) будем иметь

$$\delta z_0=\frac{1}{2}a_{11}\int_t^0 \delta y_1^2\,dt,\quad \delta \dot y_1=b_{12}\delta x_2,\quad \delta \dot x_2=c_2u. \qquad (2.36)$$

Обозначая $\delta y_2=b_{12}\delta x_2$, $a=b_{12}/c_2$ получим окончательно

$$\delta z_0=\frac{1}{2}a_{11}\int_t^0 \delta y_1^2\,dt,\quad \delta \dot y_1=\delta y_2,\quad \delta \dot y_2=\frac{1}{a}u,\quad a_{11}>0,\quad |u|\le 1. \qquad (2.37)$$

Система (2.37) рассматривалась в /69/ (безотносительно к особым экстремалям и входу на них). Там показано, что при движении из любого начального положения к граничным условиям $\delta y_1(0)=\delta y_2(0)=0$ оптимальное управление является осциллирующим и линия переключения имеет вид: $\delta y_1+h a\,\delta y_2|\delta y_2|=0$, где $h\approx 0{,}4446$. Возвращаясь к старым переменным, получим (2.30). Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место при сходе. Заметим, что в регулярном случае момент схода подбирается так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

7⁰. Для вычисления особого управления α мы имеем уравнения, содержащие α :

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)=0,\quad c_{j\nu\theta}=\frac{d^{\theta}}{dt^{\theta}}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\right\}=0. \qquad (2.38)$$

$$j,\nu=1,\dots,\chi,\quad m=0,1,\dots,2k-1.$$

Число этих уравнений равно $\chi(\chi+1)2k$. Число независимых из них может оказаться больше χ. Тогда данная особая экстремаль - невозможна.

Теорема 2.9. О вычислении особого управления. Пусть $k(j)$ = пост., определитель первой группы уравнений (2.38)

$$\left|\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\right| \neq 0;\ (j,\nu=1,\dots,\chi) \text{ на } \tau_1\tau_2 \neq 0; \qquad (2.39)$$

~~(уравнения (2.38))~~ $c_{j\nu\theta}=0$ - есть либо тождество, либо следствие уравнений

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)=0,\quad (j=1,\dots,\chi). \qquad (2.40)$$

Тогда из системы (2.40) можно найти особое управление и если $\alpha_{min}<\alpha<\alpha_{max}$, то данная особая экстремаль при некоторых граничных условиях - существует.

Доказательство: поскольку определитель (2.39) системы (2.40) относительно переменных α_j не равен нулю, то эти переменные могут быть найдены из (2.40). Если они удовлетворяют ограничениям и длина отрезка $\tau_1\tau_2 \neq 0$, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

Отметим, что для системы уравнений (2.20), как нетрудно убедиться непосредственной проверкой,

$$c_{j\nu 0}=\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\equiv 0,$$

а потому у многократной экстремали с простой особенностью в этом случае нет "лишних" уравнений.

Отметим также, что как показано в § 6 скользящие режимы являются частным случаем особых экстремалей, а потому все результаты по особым экстремалям, автоматически распространяются и на скользящие режим.

Пример 2.6 (На двухкратный особый режим). Найти минимум в задаче

$$I=\int_0^T \frac{2}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)dt,\ \dot{x}_1=u_1+2u_2,\ \dot{x}_2=u_1-u_2,\ |u_1|\le 1,\ |u_2|\le 1, \quad (2.4I)$$

$$x_1(0)=x_{10},\ x_2(0)=x_{20},\ x_1(T)=x_{1},\ x_2(T)=x_{2K}. \quad (2.42)$$

Предполагается, что $x_{10}, x_{20}, x_{1K}, x_{2K}$ – достаточно близки к 0, а T – достаточно велико.

В соответствии с данным параграфом имеем:

$$H=-\frac{2}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+p_1(u_1+2u_2)+p_3(u_1-u_2), \quad (2.43)$$

$$\dot{p}_1=\frac{2}{3}(2x_1+x_2),\quad \dot{p}_2=\frac{2}{3}(x_1+2x_2), \quad (2.44)$$

$$H_{u_1}=p_1+p_2=0,\quad H_{u_2}=2p_1-p_2=0, \quad (2.45)$$

$$\dot{H}_{u_1}=x_1+x_2=0,\quad \dot{H}_{u_2}=3x_1-x_2=0, \quad (2.46)$$

$$\ddot{H}_{u_1}=2u_1+u_2=0,\quad \ddot{H}_{u_2}=2u_1+7u_2=0. \quad (2.47)$$

Откуда следует, что возможны две особые экстремали с простой особенностью: $x_2=-x_1$ и $x_2=3x_1$ и одна с двухкратной: $x_1=x_2=0$. В последнем случае $u_1=u_2=0$. Нетрудно проверить, что необходимое условие оптимальности (2.3) – выполнено. В самом деле, проверяя квадратичную форму (2.3) при помощи критерия Сильвестра из (2.47) на двукратной особой экстремали, получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 7\end{vmatrix}=12>0,\quad 2>0,\quad 7>0.$$

А это говорит о положительности квадратичной формы.

Теорема 2.4 также выполнена. Входящие в нее выражения (2.46), (2.47) равны нулю, а остальные обратились в тождества. Легко проверить, что выполняются и все остальные условия, изложенные в § 2. В частности, равенства (2.46) представляют собой условия входа в особую экстремаль.

Синтез при входе показан на фиг. Б.4а, а при сходе на фиг. Б.4б. Движение в общем случае идет вначале по границе обеих управлений, затем по особой экстремали с порядком особенности единица (одно управление граничное), а затем (в начале координат) по экстремали с порядком особенности два. Оптимальное значение обеих управлений при этом лежит внутри области изменения. При сходе картина обратная (фиг. Б.4б).

Приложение I к § 2

Случай простой особенности

Из рассмотренного общего случая особых экстремалей со сложными особенностями целесообразно выделить случай простой особенности и случай простой особенности с порядком особенности единица, ибо они наиболее часто встречаются на практике.

I^0. Случай простой особенности с порядком особенности единица. Полагая в выражениях (2.I5), (2.2I), (2.39) и др. $\kappa=1$, $j=1$ получим:

I) Для оптимальности особой экстремали необходима положительная определенность квадратичной формы:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]\delta\xi^2+2\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]\delta u_\beta\delta\xi-\frac{\partial^2 H}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma>0 \qquad (I.1)$$

$$\beta,\gamma=1,\dots,m.$$

2) Для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)=0;\ \frac{\partial H}{\partial\alpha}=0;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)=0;\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]=0;\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right],$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]\right\}=0. \qquad \beta=1,2,\dots,m. \qquad (I.2)$$

3) Выполнение равенств (I.2) необходимо для регулярного входа на особую экстремаль с непрерывным $\rho_i(t)$.

4) Для регулярного схода с особой экстремали необходимо $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] > 0.$

5) Для вычисления особого управления в каждой точке особого участка необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] \neq 0. \qquad (I.3)$$

2^0. Случай простой особенности. Полагая в выражениях (2.15), (2.21), (2.39) и др. $K = I$, получим:

I) Для оптимальности особой экстремали необходима положительная определенность квадратичной формы

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_\nu + 2\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta u_\beta\,\delta\xi_j - \frac{\partial^2 H}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma. \qquad (I.4)$$

2) Для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)=0,\ \frac{\partial H}{\partial\alpha}=0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0,\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right\}=0 \quad \beta=1,\dots,m;\ \nu,j=1,\dots,\chi. \qquad (I.5)$$

3) Выполнение равенств (I.5) необходимо для регулярного входа на особую экстремаль с непрерывными $p_i(t)$.

4) Для вычисления особого управления в каждой точке особого участка необходимо, чтобы определитель

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right| \neq 0 \qquad j,\nu=1,\dots,\chi.$$

Эти результаты опубликованы автором в /I/, /2/.

Приложение 2 к § 3.

Особые поверхности в системах 2-го и 3-го порядка.

I^0. В системе 2-го порядка (2.2') с одним управлением нетрудно получить особые поверхности в явном виде. В самом деле мы

167

имеем два конечных соотношения

$$H_\alpha = p_i \varphi^i(t,x) = 0, \quad \dot{H}_\alpha = -p_i[(\varphi^i_{x_k}\gamma^k - \gamma^i_{x_k}\varphi^k) + \varphi^i_t] = 0 \quad i = 0,1, \quad p_0 = -1, \qquad (2.I)$$

где для удобства записи индексы у φ и γ перенесены наверх.
Исключая из них p_1 получим особую поверхность

$$\varphi^0(\gamma^1\varphi^1_{x_1} - \varphi^1\gamma^1_{x_2}) - \varphi^1_1(\gamma^1\varphi^0_{x_1} - \varphi^1\gamma^0_{x_1}) = 0. \qquad (2.2)$$

С одной стороны у этой поверхности $\alpha = \alpha_{max}$, с другой $\alpha = \alpha_{min}$.

2^0. Если система 3-го порядка (2.2') автономная и время процесса свободно, то имеет место первый интеграл $H = 0$. На особой поверхности он имеет вид

$$H = p_i f_i(x) = 0. \qquad (2.3)$$

Присоединяя его к системе (2.I) (в которой i = 0,I,2) и исключая из полученной неоднородной системы 3-х линейных уравнений p_1, p_2, получим особую поверхность:

$$(\varphi^0\gamma^2 - \varphi^2\gamma^0)(\gamma^1\varphi^1_{x_1} + \gamma^2\varphi^1_{x_2} - \varphi^1 g^1_{x_1} - \varphi^2 g^1_{x_2}) +$$
$$+(\varphi^1\gamma_0 - \varphi^0\gamma^1)(\gamma^1\varphi^2_{x_1} + \gamma^2\varphi^2_{x_2} - \varphi^1 g^2_{x_1} - \varphi g^2_{x_2}) +$$
$$+(\varphi^2\gamma^1 - \varphi^1\gamma^2)(\gamma^1\varphi^0_{x_1} + \gamma^2\varphi^0_{x_2} - \varphi^1 g^0_{x_1} - \varphi^2 g^0_{x_2}) = 0. \qquad (2.4)$$

3^0. В случае, когда число особых управлений $\chi = n+1$, аналогично пункту I^0 можно получить выражение для особой экстремали в пространстве $T \times X$ в явном виде. Это будет многообразие I-го измерения. Если система (2.2') автономная и конечное время свободно, то особую экстремаль можно получить и для $\chi = n+2$.

Приложение 3 к § 2

Синтез 3-х систем 2-го и 3-го порядков

Теорию особых и импульсных режимов можно использовать для синтеза систем 2-го и 3-го порядков довольно общего вида.

I^0. Пусть система 2-го порядка ($n = 2$) имеет вид

$$I = \int^T f_0(x)\,dt, \quad \dot{x}_1 = f_1(x,u), \quad u \in U. \qquad (3.1)$$

Легко видеть, что может быть особая экстремаль, т.к. $\partial H/\partial u = \rho \partial f/\partial u = 0$, откуда, в частности, $\rho = 0$, но тогда $\partial^2 H/\partial u^2 = \rho \partial^2 H \partial u^2 = 0$ и матрица $F_1 = \|H_{uu}\|$ (см. § 2 п. I^0) имеет ранг 0.

Пусть $f_0(x)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция (фиг. 6.5) x° – точка минимума этой функции, уравнение $\dot{x}_1^\circ = f_1(x^\circ, u)$ – разрешимо относительно u причем $u \in U$. Обозначим

$\mu_1(x, \bar{u}) = \inf_{u \in U} f_1(x,u)$, $\mu_2(x, \bar{\bar{u}}) = \sup_{u \in U} f_1(x,u)$, $\bar{u} = \bar{u}(x)$, $\bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}(x)$.

и пусть $\mu_1(x^\circ) < 0, \mu_2(x^\circ) > 0$. Например, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ имеют вид, показанный на фиг. 6.6.

Тогда синтез оптимальных траектории при входе на особую минималь будет выглядеть как показано на фиг. 6.7а, а при сходе – как показано на фиг. 6.7б. Оптимальная траектория (при достаточно большом T) состоит из быстрейшего движения ($c\ \bar{u}$ или $\bar{\bar{u}}$) к особой экстремали, движения по особой экстремали x° и участка схода ($c\ \bar{u}$ или $\bar{\bar{u}}$). Момент схода подбирается так, чтобы удовлетворить заданным условиям на правом конце. Синтез очевиден, т.к. на особой минимали x° достигается абсолютный минимум, а $\bar{u}$ или $\bar{\bar{u}}$ соответствуют максимальной скорости убывания (возрастания) функционала (в силу вогнутости $f_0(x)$).

<u>Замечания:</u> I. Можно снять ограничение, что $f_0(x)$ – вогнутая функция, но тогда особых экстремалей может быть несколько и вопрос выбора абсолютной минимали нуждается в дополнительном исследовании.

2. Если особое управление одно ($z = \mathrm{I}$), то ограничение, что u входит только во 2-е уравнение (3.I) не существенно. Как показано в § 3 гл. 6 введением новых переменных систему (2.2')

можно преобразовать к виду (3.I).

2^0. В более общем случае система (2.I) может иметь вид

$$I=\int_0^T f_0(t,x)\,dt,\ \dot{x}=f(t,x,u),\ u\in U,$$

Пусть $f(t,x)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция при любом $t\in[0,T]$, уравнение $\dot{x}^0=f(t,x^0,u)$ разрешимо относительно u при любом $t\in[0,T]$ и полученное $\bar{u}\in U$ являются внутренней точкой в U.

$$\mu_1(t,x)=\inf_{u\in U} f(t,x,u),\ \mu_2(t,x)=\sup_{u\in U} f(t,x,u).$$

И пусть $\mu_1(t,x^0)<\dot{x}^0(t),\ \mu_2(t,x^0)>\dot{x}^0(t)$. Предполагается, что μ_1 и μ_2 – непрерывны.

Синтез оптимальных траектории строится аналогично предыдущему и показан на фиг. Б.8, Б.9. В данном случае имеют место теже замечания, что и в п. I^0.

3^0. Пусть система 3-го порядка имеет вид

$$I=\int_0^T f_0(x_1)\,dt,\ \dot{x}_1=f_1(x_1,x_2),\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)+u,\ x_0(T)=\min. \tag{3.2}$$

$f_0(x_1)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция, $f_1(x_1,x_2)$ – непрерывная, ограниченная по x_2 при любом x_1 функция, $f_2(x_1,x_2)$ – определена и ограничена, u – неограничено.

Обозначим x_1^0 – точку $\inf_{x_1} f_0(x_1)$. Пусть уравнение $f_1(x_1^0,x_2)=0$ разрешимо относительно x_2 единственным образом. Обозначим корень этого уравнения x_2^0.

Найдем $\mu_1(x)=\inf_{x_2} f_1(x_1,x_2),\ \mu_2(x_1)=\sup_{x_2} f_1(x_1,x_2)$

и соответствующие значения $\bar{x}_{2\,\inf}$, $\bar{x}_{2\,\sup}$.

Пусть $\mu_1(x_1^0)<0$, а $\mu_2(x_1^0)>0$. Например, $\mu_1(x_1),\mu_2(x_1)$ могут иметь вид, показанный на фиг. Б.10.

Изменение x_0, x_1 в импульсе можно найти, поделив два первых уравнения (3.2) на 3-е уравнение в (3.2) ($u=\pm\infty$). Получим $dx_0/dx_2 = 0$, $dx_1/dx_2 = 0$, т.е. в импульсе I и x_1 - постоянны.

Синтез оптимальных траекторий при входе на особую минималь показан на фиг. 6.IIа. Оптимальная траектория состоит из импульса до кривой $\bar{x}_{2\,inf} = \varphi_1(x_1)$, $\bar{x}_{2\,sup} = \varphi_2(x_1)$ соответственно, движения по этим кривым в сторону x_1^0 , и импульса до точки x_2^0. Синтез при сходе показан на фиг. 6.IIб. Синтез очевиден, т.к. x_1^0, x_2^0 - абсолютная минималь, а остальные участки являются участками максимально быстрого убывания (возрастания) функционала (в силу вогнутости $f_0(x_1)$).

Приложение 4 к § 2

Системы n -го порядка специального вида. Условия инвариантности

Пусть система (2.2') имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [f_0(t,x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)\alpha_i]dt, \quad \dot{x}_i = \alpha_i, \quad x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b. \qquad (4.1)$$

Функции $f_i(t,x)$ непрерывны и дифференцируемы. Применяя обычную процедуру, находим

$$H = (p_i - f_i)\alpha_i - f_0, \quad \dot{p}_j^0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\alpha_j + \frac{\partial f_0}{\partial x_i},$$

$$H_{\alpha_i} = p_i - f_i = 0, \quad \dot{H}_{\alpha_i} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\alpha_j - \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = 0.$$

Для оптимальности необходимо выполнение равенств

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \qquad (4.2)$$

Всего таких равенств $K = \frac{n(n+1)}{2}$. Если соотношения (4.2) имеют место во всем фазовом пространстве $X \times T$, то, как известно, этого необходимо и достаточно, чтобы интеграл (4.I), который можно записать еще в виде:

$$I \int_{t_1,x(t_1)}^{t_2,x(t_2)} f_0(t,x)dt + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)dx_i,$$

не зависел от пути интегрирования. Таким образом выполнение (4.2) во всем фазовом пространстве является необходимым и достаточным условием полной инвариантности системы (4.I).

Если же (4.2) имеет место только на некотором многообразии в пространстве $X \times T$, то система (4.I) будет инвариантна только на этом многообразии.

§ 3. Метод преобразований в особых экстремалях

В этом параграфе излагается 2-ой метод анализа особых экстремалей в задачах оптимального управления - метод преобразований или метод замены переменных. Этот метод под названием "метод кратных максимумов" предложен Гурманом В.И. в[47],[99], а за границей (как метод преобразований) для системы вида: $\dot{x}_i = \gamma_i(x) + \alpha \varphi_i(x)$ - с одним управлением, излагался в[85]. Наше рассмотрение отличается от работы [47] следующими моментами: I. Преобразованные уравнения с особым управлением не отбрасываются как в[99], а остаются в системе. В результате порядок системы уравнений остается прежним. Это позволяет искать особое решение сразу в классе допустимых (непрерывных) кривых, а не на расширенном множестве разрывных функций как в методе кратных максимумов, которое может и не иметь ни одного близкого элемента из допустимой совокупности (ввиду ограничений на производную $\dot{x}(t)$). 2. Система сразу приводится к нужному виду единым преобразованием, а не путем последовательных операций как в[99]. Во многих случаях это удобнее. Уравнения преобразования при этом иные, чем в[99]. Они опубликованы автором в[4]§ 4. 3. Предлагаемый вывод уравнений преобразования является более коротким и простым, чем в[47],[99], а идея введения такого преобразования, по мнению автора, более естественной.

Поскольку метод кратных максимумов разрабатывался применительно к скользящим режимам (отсюда он и получил свое название, ибо скольжение возможно только когда функция $H(u)$ имеет два и более максимума), а в данном случае мы имеем дело с особыми экстремалями ($H(u)$-постоянна), то представляется более правильным называть его методом преобразований, что более точно отражает его суть. Применение этого метода ограничено, т.к. он требует отыскания первых интегралов системы уравнений в частных производных. Однако в тех случаях, когда он применим, он часто позволяет получить более полную информацию о специальных экстремалях.

В данном параграфе методом преобразований доказывается, что когда сравниваются при прочих равных условиях минимали с одинаковыми порядками особенности, то абсолютная минималь находится среди минималей, имеющих наивысший порядок особенности (теорема 3.2), а в случае $\tau = 1$ и одинакового порядка особенности - среди минималей имеющих наивысший порядок сложности (теорема 3.3.). Кроме того, рассмотрены условия входа, движения и схода с особой экстремали в преобразованной задаче.

I^{0}. Постановка задачи. Метод решения. Пусть на отрезке $[t_1, t_2]$ задана система уравнений (2.2). Выражения φ_{ij} можно рассматривать как проекции вектора $\vec{\varphi}_j$ на координатные оси x_i . Идея метода состоит в таком преобразовании системы координат, чтобы S -векторов $\vec{\varphi}_j$ были параллельны s новым базисным векторам (предполагается, что вектора $\vec{\varphi}_j$ линейно-независимы и $S \le n$). Тогда очевидно $\vec{\varphi}_j$ спроектируются только на эти S базисных векторов и система (2.2) примет вид

$$\dot{z}_i = f_i(t,z,u) \quad i=0,1,\dots,\nu; \quad \nu = n-s, \tag{3.1}$$

$$\dot{z}_{\nu+j} = f_{\nu+j}(t,z,u) + q_j(t,z,u)\alpha_j; \quad j=1,\dots,s; \text{ по } j \text{ - не сумма.}$$

Если теперь поставить вариационную задачу для системы (3.2), то составляя гамильтониан H, получим

$$H = H^0 + \sum_{j=1}^{s} H^j_{\alpha_j}, \text{ где } H^0 = p_i \gamma_i, \; H^j = P_{\nu+j} q_j \qquad (\text{по } j \text{ -не сумма}) \tag{3.2}$$

Исследуем зависимость $\sup_\alpha H$. Когда $P_{\nu+j} \neq 0,\ q_j \neq 0$, управление α_j равно одному из своих граничных значений. Если же оптимальное α_j лежит в открытой области, то частная производная по α_j на особой экстремали $H_{\alpha_j} = P_{\nu+j} q_j = 0$ (по j - не сумма). Отсюда следует, что либо $P_{\nu+j} \equiv 0$, либо $q_j = 0$. Когда $q_j \equiv 0$, между t, z, u имеется некоторая дополнительная зависимость и система инвариантна относительно α_j. Этот случай мы оставим в стороне.

Случай, когда $P_{\nu+j} \equiv 0,\ q_j \equiv 0$, равносилен условию, что соответствующее уравнение с номером $\nu+j$ в (2.2) отсутствует, а вместе ~~с~~ с ним исчезает и особое управление α_j. В оставшейся системе $z_{\nu+j}$ становится управлением.

Пусть χ - число особых управлений, оптимальные значения которых лежат в открытой области. Если матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j} \partial z_{\nu+\gamma}} \right\| \quad (j,\gamma = 1,\dots,\chi) \tag{3.3}$$

имеет ранг χ, то как нетрудно проверить особая экстремаль имеет простую особенность.

Особые экстремали, у которых определитель $\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j} \partial z_{\nu+\gamma}} \right\| = 0 \; j, \gamma = 1, \dots, \chi$ соответствуют экстремалям со сложной особенностью.

Систему первых ν уравнений (3.I), если она содержит линейные управления можно подвергнуть аналогичному преобразованию. Повторяя эту операцию мы убедимся, что либо система вообще не имеет особых решений[I)], либо придем к системе типа (3.I), в которой на участке особого режима, соответствующие уравнения с α_j отбрасываются и оставшаяся система не имеет особых управлений[2)].

В дальнейшем предполагается, что исходная задача (2.2) преобразована к задаче с уравнениями типа (3.I). Пусть мы отбросили ξ уравнений (3.I).

Теорема 3.I. Если указанное преобразование возможно, то вырождение вариационной задачи с уравнениями (2.2) на участке особого режима равно 2ξ.

В самом деле, поскольку на участке особого режима отбрасывается ξ уравнений, то общий порядок системы дифференциальных уравнений вариационной задачи понижается на 2ξ единиц за счет ξ уравнений (3.I) и ξ уравнений $\dot{P}_i = -H_{x_i}$. В частности, в случае простой особенности $\xi = \mu$ – порядку особенности экстремали.

В специальном случае, когда φ_{ji}, γ_i, не содержат v, u т.е. (2.2) имеет вид: $\dot{x}_i = \gamma_i(t, x) + \alpha_j \varphi_{ij}(t, x) \; i = 0, 1, \dots, n; \; j = 1, 2, \dots, s$ один из конкретных методов получения системы (3.I) из (2.2) за-

----

I) Последнее оставшееся уравнение содержит особое уравнение. Это будет, например, если уравнения (2.2) линейны.

2) Однако на участке $\rho_{\nu+j} = 0$ в редуцированной задаче, мы сохраним термин "особая экстремаль".

ключается в следующем. Положим $z_i = z_i(t,x)$, где $z_i(t,x)$ – непрерывные дифференцируемые функции. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\gamma_k + \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\varphi_{kj}\alpha_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \qquad (k=1,\dots,n; \text{ по } i \text{ – не сумма}) \qquad (3.4)$$

Выберем $n-s=\nu$ функций z так, чтобы ν уравнений (3I) не зависели от α_j , а s оставшимися функциями z зададимся, так, чтобы s оставшихся уравнений зависели каждое от одного особого управления α_j. Приравнивая соответствующие коэффициенты при α_j в (3.4) нулю, получим, что ν функций z должны удовлетворять системам уравнений в частных производных[I)].

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\varphi_{kj}(t,x)=0 \; (i=1,\dots,\nu;\; j=1,\dots,s; \quad \text{по } i,j \text{ –не сумма}) \qquad (3.5)$$

Величина t является в (3.5) параметром.

Т.к. ν систем в (3.5) совпадают между собой, достаточно найти решение одной из систем (3.5), индекс i можно опустить.

Пусть система (3.5) находится в инволюции. Тогда ν ее независимых первых интегралов $C_i = z_i = \zeta_i(t,x)\; i=1,\dots,\nu$ дадут нам ν первых функций z_i в (3.2). Для отыскания оставшихся s функций $z_{\nu+j}$ ($j = 1,\dots,s$) достаточно найти по одному первому интегралу каждой из s систем уравнений

$$\frac{\partial z_{\nu+j}}{\partial x_k}\varphi_{kj}(t,x)=0 \; (j=1,\dots,\beta-1,\beta+1,\dots,s;\; \beta=1,\dots,s). \qquad (3.6)$$

Предположим, что такие интегралы существуют. Обозначим их $C_{\nu+j}=z_{\nu+j}=\xi_j(t,x)$. Пусть функциональный определитель $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_\alpha}\right| \neq 0$ $(i,\alpha=1,2,\dots,n)$. Переходя от x к новым переменным z преобразуем систему (2.2) в (3.I). При этом старые переменные исключаем при помощи уравнений $z_i=\zeta_i$, $z_{\nu+j}=\xi_j$. Из этой же системы для задан-

---

I) Нетрудно доказать, что выполнение (3.5), (3.6) является необходимым и достаточным условием указанного преобразования.

ных $x(t_1), x(t_2)$ находим новые граничные условия $z(t_1), z(t_2)$ и новый функционал $x_1(t_2) = G[z(t_2)]$.

2°. Условия входа, движения и схода с особого режима (простая особенность).

а) Условия входа. Пусть при $t = t_3$, множитель $P_{\nu+j}$ обратился в нуль. Тогда в момент t_3+0 возможно либо переключение с одного граничного значения α_j на другое, либо особый режим. Однако, ввиду непрерывности z_j значение z_j^- - слева от t_3 должно совпадать с z_j^+ - справа, определяем как управление из уравнения $\partial H/\partial z_j = 0$. Для того, чтобы удовлетворить этому дополнительному условию, необходимо на вход "израсходовать" одно $P_i(t_1)$.

б) Условием движения по особому режиму является выполнение $\sup\limits_{p} H$, где в перечень управлений включено и z_j, т.е. $p = \{u, \alpha, z_j\}$. В частности, выполнение неравенства $\frac{\partial^2 H}{\partial z_j \partial z_j} \leq 0$. Другое требование: особое управление α_j должно лежать в пределах своих границ, т.е. $\alpha_{j\,min}(t) \leq \alpha_j(t) \leq \alpha_{j\,max}(t)$. Его можно определить, если $q_j \neq 0$ и в уравнение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_j}\right) = 0$ подставить (3.1). И наконец, последнее требование - непрерывность координаты z_j на участке особого режима. Если эта непрерывность нарушается, то сход с особого режима обязателен[1)].

в) Сход с особого режима удобнее делать по заданному значению t. Момент схода и направление его подбирается так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце или входу на другой участок особого режима.

---

1) Заметим, что на участке особого режима легко можно учесть ограничения на z_j типа $z_{j\,min}(t) \leq z_j(t) \leq z_{j\,max}(t)$, ибо на этом участке z_j является управлением.

Таким образом в случае простой особенности взамен $p_i(t_1)$, "израсходованного" на вход в особый режим, имеем произвольный момент выхода и направление схода[I)], подбирая которые можно, вообще говоря, удовлетворить всем граничным условиям на правом конце.

3°. Теоремы о целесообразности особых экстремалей. Пусть вариационная задача для (3.2) дает группу из N минималей, содержащей все решения, удовлетворяющие достаточным условиям сильного относительного минимума и заданным фиксированным граничным условиям. Пусть в N входят особые минимали ($t_1 \leq t \leq t_2$) только с простой особенностью. Разделим эту группу на подгруппы в зависимости от порядка особенности каждой минимали.

Теорема 3.2. При прочих равных условиях абсолютная минималь вариационной задачи находится в подгруппе минималей, имеющих наивысший порядок особенности.

Доказательство: поскольку множество допустимых непрерывных кривых, в которых отбрасывалось максимальное число связей (3.I), самое широкое из допустимых множеств, то результат, сформулированный в теореме следует из принципа расширения /7/. Теорема доказана.

Заметим, что теорема имеет место только для минималей (а не для экстремалей). Они должны, в частности, иметь одни и те же концы и особая минималь должна быть особой на всем отрезке $[t_1, t_2]$.

Аналогично можно показать, что имеет место

Теорема 3.3. Если сравниваются при прочих равных условиях, минимали с одинаковыми порядками особенности, но с разными по-

---

I) Особые экстремали расположены на поверхность измерения от I до n в $n+1$ - мерном пространстве $t\,x$. В случае m = I и простой особенности таковой является гиперповерхность переключения управления α. При сходе с особой экстремали можно сойти в ту или иную сторону от этой гиперповерхности.

рядками сложности (по одному управлению), то абсолютная минималь находится в подгруппе минималей, имеющих наивысший порядок сложности.

Пример 3.1. Найти минимум $y_1(x_2)$, если

$\dot{y}_1 = y_2^4 - y_2^2 + a x y_2 - y_2 - x u$, $\dot{y}_2 = y_2 \sin^2 x + y_2^2 + u$,

$a>0$, $|y_2| \leq 1$, $0 < y_2(x_1) < 1$, $0 > y_2(x_2) > -1$,

$x_2 > 0$, $x_1 < 0$, $y_1(x_1) = 0$.

Система, записанная в первой строке - сложная. При любой заданной функции $u(x)$ вряд ли можно найти ее общее решение в конечном виде. Применяя алгоритм принципа максимума, получаем $u = sign\,(p - x)$, а поскольку u - не ограничено, правые части уравнений обращаются в ∞. Как вариационная задача с точки зрения обычных методов она усложнена и тем, что имеет ограничение на фазовую координату y_2. Однако методом, изложенным в данном параграфе, эта задача решается просто. В самом деле составляем уравнение (3.5): $\frac{\partial z}{\partial y_1} \dot{x} - \frac{\partial z}{\partial y_2} = 0$, находим функцию $z = y_1 + x y_2$, которая ему удовлетворяет, и переходим к новой системе координат z, y_2 (заменяем $y_1(x)$ на $z(x)$). Получим $\dot{z} = y_2^4 - y_2^2 + a x y_2$, $\dot{y}_2 = y_2 \sin^2 x + y_2^2 + u$.

Т.к. $z(x_2) = y_1(x_2) + x_2 y_2(x_2)$, где $x_2, y_2(x_2)$ - заданные числа, то минимум в новой системе соответствует минимуму в старой системе.

Исследуем особые экстремали. На особых экстремалях $p \equiv 0$ и в системе (3.8) остается только 1-е уравнение, в котором y_2 играет роль управления. Гамильтониан $H = y_2^4 - y_2^2 + a x y_2$ как функция y_2 изображен на фиг. 6.12а,б при $x<0$, $x>0$. Он имеет два максимума, дающие две особые экстремали. Из фиг. 6.12 видно, что при $x<0$ $\sup\limits_{y_2} H$ достигается на максимуме с $y_2 > 0$, а при $x>0$ на максимуме с $y_2 < 0$.

Таким образом в момент $x = 0$ необходимо совершить переход с одной особой экстремали - на другую. Такие же импульсные переходы должны быть в конечных точках, если эти точки не лежат на особой экстремали и требуется выйти на особую экстремаль. Если при этом встречается ограничение $y_2 = \pm 1$, то траектория идет по ограничению в сторону особой экстремали. Типичный вид минималей для данного примера показан на фиг. 6.13.

Пример 3.2. Задача о наивыгоднейшем старте самолета вертикального взлета. Пусть требуется самолету, у которого тяга больше веса, стартуя с земли, выйти на заданную высоту и скорость с минимумом расхода топлива. Если перепад высот и скоростей не велик, изменением плотности с высотой можно пренебречь, а сопротивление считать пропорциональным квадрату скорости V. В целях простоты мы будем пренебрегать и индуктивным сопротивлением, ограничивая однако допустимый угол атаки. При этих предположениях уравнение на нормаль к траектории можно опустить, считая, что производная тангажа θ' - ограничена и $\leq \theta'_{max}(m,V)$.

Уравнения движения

$$\dot{H} = V\sin\theta, \quad \dot{V} = \frac{1}{m}(V_e\beta - aV^2) - g\sin\theta, \quad \dot{m} = -\beta. \tag{3.7}$$

Здесь H - высота, V_e - скорость истечения продуктов сгорания, $\beta > 0$ - расход топлива (задан), m - масса самолета, g - земное ускорение, θ - угол наклона траектории к горизонту, $a = const > 0$. Точка обозначает дифференцирование по времени t.

Переходим к новой независимой переменной m. Обозначим $1/\beta = b$, $\sin\theta = \alpha$. Тогда $H' = -Vb\alpha$, $V' = -\frac{V_e}{m} + b\left(\frac{aV^2}{m} + g\alpha\right)$, $|\alpha| \leq \alpha_{max}(m,V)$, $m_0 \leq m \leq m_1$, $H' = \frac{dH}{dm}$, $V' = \frac{dV}{dm}$.

Граничные условия $H(m_0) = 0$, $H(m_1) = H_1$, $V(m_0) = 0$, $V(m_1) = V_1$, $m_1 = max$.

Особое управление α. Применяем метод преобразований. Уравнение (3.5) есть $\frac{\partial z}{\partial H} V - \frac{\partial z}{\partial V} g = 0$. Его первый интеграл $z = H + \frac{V^2}{2g}$ - энергетическая высота. Из него видно, что максимум H (или V) соответствует максимуму z. При помощи этого же выражения находим граничные условия для z. Переходим к системе (3.2)

$$z' = \frac{V}{mg}(-V_e + \beta a V),\ V' = -\frac{V_e}{m} + \beta\left(\frac{aV^2}{m} + g\alpha\right),\ |\alpha| \leq \alpha_{max}(m,V) \quad (3.8)$$

На участке особого режима 2е уравнение может быть отброшено. После этого в I-м уравнении V -становится управлением. При этом можно учесть и границы, если считать, что $|V'| \leq V'_{max}(m,V)$. Отыскивая минимум[1] по V в первом уравнении, получим, что оптимальная скорость на особом участке постоянна и равна $V = \left(\frac{V_e}{3\beta a}\right)^{1/2}$. Условие оптимальности особой экстремали $(z')_{VV} = \frac{6\beta a V}{mg} \geq 0$ выполнено, если $\beta = 1/\beta > 0$, т.е. топливо расходуется $(\beta > 0)$, а не возрастает ($\beta < 0$). Минималь с учетом ограничения на производную V' имеет вид, показанный на фиг.6.14 (отмечена цифрой I). Она состоит из участка выхода на особую минималь по ограничению V'_{max}, вертикального подъема с постоянной скоростью и выхода по ограничению в заданную точку B. Минимали с учетом поверхности земли и оптимизации со скорости $V(m_0) \neq 0,\ \theta_0 = \pi/2$ отмечены цифрами 2 и 3 соответственно.

Пример 3.3. Задача об оптимальном программировании расхода топлива ракетой при вертикальном подъеме. Будем считать, что плотность воздуха по высоте постоянна, а сопротивление пропорционально квадрату скорости. Аналогично предыдущим примерам уравнения движения можно записать

$$H' = -V\alpha,\ V' = -\frac{V_e}{m} + \frac{aV^2\alpha}{m} + g\alpha,\ \infty \leq \alpha \leq \frac{1}{\beta_{max}},\ m_1 \leq m \leq m. \quad (3.9)$$

---

[1] Интегрирование в сторону убывания m от m_0 до $m_1 < m_0$. Если поменять пределы интегрирования (поменять знак у правых частей (3.8)), то надо брать минимум, ибо мы ищем максимум m_1.

Здесь $\alpha = 1/\beta$ – особое управление, β – расход топлива ($0 \le \beta \le \beta_{max}$), штрих обозначает дифференцирование по m. Граничные условия: $H(m_0), H(m_1), V(m_0)\ V(m_1)$, m_0 – заданы, $m_1 = max$. Согласно описанной в данном параграфе процедуре делаем преобразование координат. Составляем уравнение (3.5) $\frac{\partial z}{\partial H} - \frac{\partial z}{\partial V}\left(\frac{aV}{m} + \frac{g}{V}\right) = 0$. Его первый интеграл $z = H + \frac{m}{2a}\ ln\left|\frac{aV^2}{m} - g\right|$.

Новая система

$$z' = -\frac{V(V_e + 1/2 V)}{aV^2 + mg} + \frac{1}{2a}\ ln\left|\frac{a}{m}V^2 + g\right|,\ V = -\frac{V_e}{m} + \left(\frac{a}{m}V^2 + g\right)\alpha\ . \quad (3.10)$$

Т.к. α теперь входит только во 2-е уравнение, то оно может быть отброшено, а V в 1-м уравнении становится управлением с ограничением на производную V' (ибо α – ограничено). Отыскивая минимум 1-го уравнения в (3.10) по V, находим зависимость $V_{опт} = V(m)$. Оптимальная программа расхода топлива будет состоять из участков выхода с V'_{max} на особую минималь, полета по особой кривой и выхода с V_{max} в заданную точку.

§ 4. Случай общих связей

Ранее в § 3 мы рассматривали случай, когда уравнения имеют вид (2.2). Рассмотрим теперь общий случай, когда

$$\dot{y}_i = f_i\ (x, y, u) \qquad i = 0, 1, \dots, n, \qquad x_1 \le x \le x_2 . \qquad (4.1)$$

Как и ранее μ будет обозначать порядок особенности экстремали, т.е. дефект ранга матрицы $F = \| B_{u_\beta u_\gamma} \|\ \beta, \gamma = 1, \dots$ $\dots, m \le r$ или $F_1 = \| H_{u_\beta u_\beta} \|$. Пусть на некотором интервале $(x_3\ x_4) \subseteq [x_1, x_2]$ число $\mu > 0$. Тогда по теореме о неявных функциях на $x_3\ x_4$ между переменными системы уравнений (4.1) имеется, вообще говоря, $m - \sigma$ тождеств

$$L^k(x, y, p) = 0 \qquad (k = 1, \dots, \mu), \qquad (4.2)$$

не содержащих управления u. Алгоритм для отыскания этих тождеств дается теоремой 4.1п (см. прил.к § 4). Эта же теорема устанавливает, что функции L^{κ} обладают непрерывными частными производными по крайней мере того же порядка, каким обладает наименее дифференцируемая функция B_{u_β} или H_{u_β}. Если же некоторые H_{u_α} не содержат u, то они и могут быть приняты в качестве L^{κ}. Тождество (4.2) должно иметь место вдоль экстремали. Поэтому продифференцируем (4.2) полным образом по x и заменим $\dot{y}, \dot{p}$ их выражениями из (4.1), (1.4) § 1. Получим

$$M^{\kappa}(x,y,u,p) \equiv L^{\kappa}_x + L^{\kappa}_{y_i} f_i - L^{\kappa}_{p_i} H_{y_i} = 0 \quad (\kappa = 1,\dots,\mu). \qquad (4.3)$$

Выражения (4.3) равносильны (4.2).

Пусть для определенности не равный нулю минор порядка σ матрицы F расположен в верхнем левом углу матрицы[1]. Заменим последние μ уравнений (2.1) μ уравнениями (4.3) и составим функциональный определитель новой системы относительно u_j $j=1,\dots,m$. В результате такой замены ранг новой матрицы F_1 может только возрасти на величину $0 \le \nu_1 \le \mu$. Если $\nu_1 = \mu$, т.е. $\sigma = m\ (\sigma_1 = \sigma + \nu_1)$, то согласно теореме о зависимости функций из вновь полученной системы σ уравнений (2.1) и μ уравнений (4.3):

$$B_{u_\beta}(x,y,p,u)=0 \quad \beta=1,\dots,\sigma, \; M^{\kappa}(x,y,u,p)=0 \quad \kappa=1,\dots,\mu \qquad (*)$$

можно определить $m=\sigma+\mu$ управлений u_j. Если же $\nu_1 < \mu$, то между переменными системы (*) существует $\mu_1 = m-\sigma-\nu_1$ зависимостей $N^{\alpha}(x,y,p)=0$ $\alpha=1,\dots,\mu_1 \le \mu$, не содержащих u, причем выражения N^{α} дифференцируемы по крайней мере столько же раз сколько дифференцируема наименее гладкая из функций H_{u_α}, M^{κ}. Поскольку тождества $N^{\alpha}=0$ должны иметь место вдоль экстремали,

----

[1] Если это не так, то перестановкой строк и столбцов и изменением порядка нумерации u_j это всегда можно достигнуть.

то дифференцируя их полным образом по x и заменяя $\dot{y}, \dot{p}$ их выражениями из (4.1), (2.1) § 1 получим

$$G^{\alpha}(x,y,u,p) \equiv N^{\alpha}_{x} + N^{\alpha}_{y_i} f_i - N^{\alpha}_{p_i} H_{y_i} = 0 \quad \alpha = 1,\dots,\mu. \qquad (4.4)$$

Эти отношения равновильны N^{α}.

Заменим μ_1 уравнений системы (*), не вошедших в наивысший минор, определявший ранг F_1, μ_1 уравнениями (4.4). От такой замены ранг функциональной матрицы F_2 относительно u_β может только возрасти на величину $0 \le \nu_2 \le \mu$. Если $\nu_2 = \mu_1$, т.е. $\sigma_2 = m \ (\sigma_2 = \sigma_1 + \nu_2)$, из полученной системы можно определить все $u_\beta \ \beta = 1,\dots, m$. Если $\nu_2 < \mu_1$, то повторяя выше описанную операцию, получим последовательность $0 \le \nu_1 \le \nu_1 + \nu_2 \le \dots \le \sum_{i=1}^{\gamma} \nu_i = \zeta$, которая может только возрастать.

Ограничимся рассмотрением случая, когда после конечного числа γ таких операций величина ζ станет равной μ. При этом предполагается, что f_i (4.1) и $\Psi(x,y)$ имеют необходимое число $\gamma+1$ и $\gamma+2$ непрерывных частных производных соответственно.

В результате получим m уравнений, содержащих управления u, с функциональным определителем относительно u отличным от нуля. Следовательно, из этих уравнений можно определить все компоненты управления, соответствующие движению по особой экстремали. Кроме того, будем иметь некоторое число зависимостей типа L, N, связывающих переменные y, p и не содержащих u. Условимся те из них, которые алгебраически независимы относительно y, p обозначать через $T^{\kappa}(x,y,p) = 0 \ \kappa = 1,\dots,\xi$.

Предыдущие рассуждения доказывают теорему:

Теорема 4.1. Пусть матрица $F = \| H_{u_\beta u_\gamma} \| \ \gamma, \beta = 1,\dots,m$ в некоторой области пространства переменных x, y, u, p (мера $|x_3 x_4| \neq 0$) имеет дефект ранга $\mu > 0$, а функции f_i и Ψ дифференцируемы нужное число раз. Тогда:

1) если после конечного числа дифференцирований наступило неравенства $\xi > 2n$, то в этой области особая минималь с порядком особенности μ -невозможна[1];

2) если при $\xi = \mu$ имеем $\xi \leq 2n$, то кривая, доставляющая минимум функционалу (особая минималь с порядком особенности μ),

удовлетворяет системе уравнений

$$B_{u_\beta}(x,y,p,u)=0 \quad \beta=1,\dots,\sigma, \quad G^\alpha(x,y,p,u)=0 \quad \alpha=1,\dots,\mu,$$

где $G^\alpha=0$ уравнения, появившиеся в результате дифференцирования, относительно которых матрица $\left\| \begin{matrix} H_{u_s u_\beta} \\ G^\alpha_{u_s} \end{matrix} \right\|$ $s,\beta=1,\dots,m$ имеет ранг[2] m.

Уравнения $T^\kappa(x,y,p)=0$ $\kappa=1,\dots,\xi$, связывающие y,p приводят к ряду важных выводов.

Теорема 4.2. <u>О порядке вырождения особой экстремали</u>. Пусть на участке особого режима с порядком особенности μ, матрица $\|T^\kappa_z\|$ $\kappa=1,\dots,\xi', z=\{y,p\}$ имеет ранг $\xi \leq 2n$. Тогда на этом участке имеют место ξ уравнений $T^\kappa=0$ $(\kappa=1,\dots,\xi)$[3] и происходит вырождение вариационной задачи не менее, чем на ξ единиц. В самом деле любые ξ уравнений (4.3), (1.4) можно заменить ξ конечными соотношениями $T^\kappa=0$, из которых (виду их алгебраической независимости) можно определить ξ переменных p,y без интегрирования. Теорема доказана.

Пусть $x_3 \in [x_1,x_2]$ значение независимой переменной x при входе в особый режим. Будем обозначать индексом "-" величины слева от x_3, а индексом "+" - справа.

---

1) В силу несовместности системы ξ уравнений $T^\kappa=0$ относительно $2n$ переменных y,p.

2) У нас остался неясным случай, когда некоторые из выражений типа L^κ, N^α обратились в тождественные нули и $\lim_{\rho\to\infty}\xi<\mu$. Можно предполагать, что в этом случае от $\mu-\xi$ управлений, не входящих в наивысший минор, величина функционала, по-видимому, не зависит. Разумеется, что это предположение, высказываемое в качестве гипотезы, нуждается в исследовании и доказательстве (<u>свойство инвариантности</u>).

3) Как и ранее предполагается, что минор наивысшего ранга находится в левом верхнем углу матрицы.

Теорема 4.3. (необходимое условие входа в особый режим). Регуляторный вход в особый режим с порядком особенности μ оптимален только в том случае, если в момент входа выполнены равенства

$$T^{\kappa}(x_3, y, p) = 0 \qquad \kappa = 1, \dots, \xi. \tag{4.5}$$

Доказательство: так как по условию задачи x, y непрерывны, то из угловых условий получаем, что $p^- = p^+$, $H^- = H^+$. Поскольку на особой экстремали имеют место тождества[1)] $T^{\xi} \equiv 0$, то в силу непрерывности $y(x)$, $p(x)$, $T(x, y, p)$ получаем, что $T^{\kappa} = 0$ при x_3. Теорема доказана.

Таким образом вход в особый режим не произволен. Начальные значения p, y, x должны быть подобраны так, чтобы при x_3 имели место (2.5).

Условием движения по особому режиму является возможность схода с особого режима при любом $x \in [x_3 x_4]$, где $[x_3 x_4] \subset [x_1 x_2]$ – отрезок оси x, соответствующий особой экстремали. В противном случае на правом конце можно удовлетворить только специально подобранным граничным условиям.

Приложение к § 4

Пусть задана система уравнений

$$f^{i}(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{4.1п}$$

Системы переменных $x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m$, когда это удобно, будем обозначать символами x, u соответственно. Функции f^{i} определены и непрерывны, вместе со своими частными производными.

Согласно теореме о разрешимости неявных функций /24/ стр.317-333, если матрица Якоби $F = \| f^{i}_{u_\beta} \|$ $i; \beta = 1, \dots, m$ имеет ранг m уравнения (4.1п) можно разрешить относительно u и представить в виде $u_\beta = g_\beta(x)$ $\beta = 1, \dots, m$. Однако, если ранг функциональной матрицы F в некоторой n-мерной области D меньше m и равен, скажем, σ, то в этой области между переменными системы (4.1п)

1) Выражения $T^{\kappa} = 0$ на экстремали являются тождествами по x и уравнениями относительно y, p.

существует $\mu = m-\sigma$ зависимостей $E^{\alpha}(x)=0$ $(\alpha=\sigma+1,\dots,m)$, не содержащих u.

Пусть для определенности не равный нулю минор порядка σ матрицы F расположен в верхнем левом углу матрицы. Если это не так, то перестановкой строк и столбцов и изменением порядка нумерации u_β это всегда можно достигнуть. Следующая теорема дает алгоритм для отыскания тождеств $E^{\alpha}(x)=0$ и устанавливает одно их свойство.

Теорема 4.1п. Пусть функциональная матрица $F=\|f^i_{u_\beta}\|$ $(i,\beta=1,\dots,m)$ системы (4.1п) имеет ранг $\sigma<m$ и наивысший минор, определяющий ее ранг, расположен в верхнем левом углу матрицы. Разрешим уравнения (4.1п) относительно переменных

$$u_\kappa = g_\kappa(x_1,\dots,x_n,u_{\sigma+1},\dots,u_m) \quad (\kappa=1,\dots,\sigma). \tag{4.2п}$$

Исключим из $\mu=m-\sigma$ уравнений $f^{\alpha}(x,u)=0$ $(\alpha=\sigma+1,\dots,m)$, не вошедших в наивысший минор, определявший ранг F, переменные $u_1,\dots,u_\sigma$ при помощи σ выражений (4.2п)[1].
Тогда полученные при таком исключении выражения $E^{\alpha}=0$ $(\alpha=\sigma+1,\dots,m)$ 1) не содержат u; 2) имеют непрерывные частные производные до того же порядка, что и функции f^i.

Доказательство: Исключим из уравнений $f^{\alpha}(x,u)=0$ $(\alpha=\sigma+1,\dots,m)$ σ первых функций u_κ при помощи (4.2п)

$$f^{\alpha}[x_1,\dots,x_n;\, g_1(x_1,\dots,x_n;u_{\sigma+1},\dots,u_m),\dots,g_\sigma(x_1,\dots,x_n;u_{\sigma+1},\dots,u_m), \tag{4.3п}$$
$$u_{\sigma+1},\dots,u_m] \equiv E^{\alpha}(x_1,\dots,x_n;u_{\sigma+1},\dots,u_m)=0 \quad (\alpha=\sigma+1,\dots,m).$$

Для того, чтобы убедиться в зависимости E^{α} только от функции $x_1,\dots,x_n$, надо доказать, что любая из этих функций, например, $E^{\sigma+1}$ аргументов $u_{\sigma+1},\dots,u_m$ не содержит. Для этого достаточно установить, что относительно $u_{\sigma+1},\dots,u_m$ тождественно будет $E^{\sigma+1}_{u_\beta}=0$ $(\beta=\sigma+1,\dots,m)$. Докажем первое равенство. Остальные доказываются аналогично.

---

1) Это возможно, ибо по условию ранг Якобиана F равен σ.

Исключим из уравнений $f^i(x,u)=0$ $(i=1,\dots,\sigma)$ переменные $u_1,\dots,u_\sigma$ при помощи отношений (4.2п) и продифференцируем полученные выражения по $u_{\sigma+1}$, считая $u_1,\dots,u_\sigma$ функциями от $x_1,\dots,x_n;u_{\sigma+1},\dots,u_m$. Мы получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial u_{\sigma+1}}+\dots+\frac{\partial f^i}{\partial u_\sigma}\cdot\frac{\partial g_\sigma}{\partial u_{\sigma+1}}+\frac{\partial f^i}{\partial u_{\sigma+1}}=0 \quad (i=1,\dots,\sigma). \tag{4.4п}$$

Из этих σ равенств, как следствие, вытекает $\sigma+1$ равенство

$$\frac{\partial f^{\sigma+1}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial u_{\sigma+1}}+\dots+\frac{\partial f^{\sigma+1}}{\partial u_\sigma}\cdot\frac{\partial g_\sigma}{\partial u_{\sigma+1}}+\frac{\partial f^{\sigma+1}}{\partial u_{\sigma+1}}=0 \tag{4.5п}$$

потому, что определитель ($\sigma+1$)-го порядка, составленный из коэффициентов при величинах $\partial g_1/\partial u_{\sigma+1},\dots,\partial g_\sigma/\partial u_{\sigma+1}$ и из свободных членов в $\sigma+1$ равенствах (4.4п), (4.5п), т.е. определитель $|\partial f_i/\partial u_j|$ $i,j=1,\dots,\sigma+1$ равен тождественно нулю, т.к. по условию ранг матрицы F равен σ. Но левая часть (4.5п) по самому определению (4.3п) функции $E^{\sigma+1}$ представляет производную $\partial E^{\sigma+1}/\partial u_{\sigma+1}$. Ввиду (4.5п) эта производная действительно равна нулю.

Таким образом, функция $E^{\sigma+1}$ зависит лишь от $x_1,\dots,x_n$ и аргументы $u_{\sigma+1},\dots,u_m$ могут быть опущены. Аналогичные рассуждения применимы к любой из функций E^α. Таким образом первое утверждение теоремы 4.1п доказано.

Второе утверждение очевидно, если вспомнить, что согласно теореме о разрешимости неявных функций функции g_k имеют непрерывные частные производные того же порядка, что и f^i. После подстановки g_k в f^α ($\alpha=\sigma+1,\dots,m$) функции E^α будут иметь частные производные того же порядка, что и f^i и g_k. Теорема доказана[1].

§ 5. Замечание о методе изучения особых экстремалей при помощи уравнений в частных производных

Возможен еще 3-ий подход к изучению особых экстремалей для связей (2.2):

---

1) Если порядок непрерывных частных производных f^i разный, E^α будут иметь непрерывные частные производные не меньшего порядка, чем наинизший порядок непрерывных частных производных функций.

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t,x,u) + \alpha_s \varphi_{is}(t,x,v^s) \qquad i=0,1,\dots,n;\ s=1,\dots,\chi \leq n.$$

Применяя формализм Гамильтона-Якоби, получим следующую систему уравнения в частных производных ($1-\sum_j \alpha_j \neq 0$)

$$\Phi^0 = \inf_u [-P_{n+1} - P_i \gamma_i(x,t,u)] = 0,\ \Phi^s = \inf_{v^s} [-P_i \varphi_i(x,t,v^s)] = 0 \quad (5.1)$$
$$(i=0,1,\dots,n;\ s=1,\dots,\chi),\ P_0 = -1.$$

Здесь ради удобства для частных производных $\partial\psi/\partial x_i$ сохранены обозначения P_i, а $\partial\psi/\partial t$ обозначено P_{n+1}.

Подвергнем эту систему алгебраическому изучению. При этом может быть один из следующих случаев:

1. Функциональная матрица

$$\left\| \frac{\partial \Phi^s}{\partial P_i} \right\| \qquad (s=0,1,\dots,\chi;\ i=0,1,\dots,n+1) \qquad (5.2)$$

имеет ранг $\chi+1$, так что уравнения (5.1) алгебраически независимы относительно $\chi+1$ аргументов P_i.

2. Матрица имеет ранг меньше $\chi+1$. При этом может обнаружится одно из следующих обстоятельств:

а) исключение P_i из уравнений, не вошедших в наивысший минор, определивший ранг матрицы (5.2) приводит к тождествам. В этом случае уравнения не вошедшие в наивысший минор, есть алгебраическое следствие остальных уравнений, а потому могут быть отброшены;

б) исключение $P_1,\dots,P_n$ дает одну или несколько зависимостей, связывающих $x_1,\dots,x_n$. Но независимые переменные в уравнениях с частными производными не могут быть связываемы зависимостями, а потому система (5.1) не имеет решения.

Мы будем предполагать, что система подходит под случай 1. Если бы она под этот случай не подходила, то ее можно было бы заменить другой, с меньшим числом уравнений, подходящей под случай 1 или убедиться, что она не имеет решения.

Составим скобки Якоби[1] для (5.1), используя равенства $\partial\phi^s/\partial y_i = 0$.

$$[\Phi^0, \Phi^s] = N^s, \quad [\Phi^s, \Phi^j] = \Pi_{sj}. \tag{5.3}$$

Если все $\Pi_{si} = 0$, $N^s = 0$, то система (5.1) находится в инволюции (замкнута) и можно приступить к ее интегированию. В противном случае, согласно теории систем уравнений в частных производных[2] к ней необходимо добавить

$$N^s = 0, \; \Pi_{sj} = 0, \tag{5.4}$$

рассматриваемых как уравнения в частных производных[3] ($p_i = \partial\psi/\partial y_i$). Систему (5.1), (5.4) подвергаем алгебраическому изучению, описанному только что. Если общее число независимых уравнений будет меньше $n+1$, для системы (5.1), (5.4) вновь составляем скобки Якоби, присоединяем их в качестве дополнительных уравнений и снова алгебраически изучаем полученную систему. Если же число уравнений больше $n+1$, то система не имеет решения.

В результате после ограниченного числа действий, мы либо приведем систему к замкнутой, а потому подготовленной к интегрированию, либо убедимся, что она решений не имеет.

Пусть замкнутая система состоит из ℓ уравнений, а φ интегралы этой системы. Вследствии вырождения число произвольных постоянных будет $2\ell < 2n$. Поэтому особая экстремаль, не содержащая обычных участков, может удовлетворить только специально подобранным граничным условиям.

---

1) Скобкой Якоби называется выражение

$$[\Phi^s, \Phi^j] = \frac{\partial\Phi^s}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\Phi^j}{\partial x_i} - \frac{\partial\Phi^s}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Phi^j}{\partial p_i}.$$

2) Гюнтер Н.М., Интегтирование уравнений 1-го порядка в частных производных, ОНТИ, 1935, стр. 242-4.

3) Можно показать, что равенство $\Pi_{sj} = 0$ эквивалентно равенству $\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right] = 0$, а равенство $N^s = 0$ – равенству $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right) = 0$. (сравни с (1.5) приложения 1 к § 2 гл. 5).

§ 6. Скользящие режимы, как частный случай особых экстремалей

По условию 1 теоремы 1.1 § 1 при каждом $x \in [x_1 x_2]$ и фиксированных значениях $y, \bar{\Psi}_y$, необходимо взять $\inf_{u \in V} B$. Величина B как функция только u представляет участок гиперповерхности $B = B(u)$ (мы будем говорить просто поверхности) в $z+1$ -мерном пространстве переменных $B, u_1, \ldots, u_z$ с границей $\Gamma(x)$ области $U(x)$. Эта поверхность, в общем случае может иметь несколько относительных минимумов как внутри допустимой области $U(x)$, так и на границе $\Gamma(x)$.

Построим на нижней стороне поверхности выпуклую оболочку, т.е. наименьшее выпуклое множество, заключающее тело ограниченное данной поверхностью. Грубо говоря, как бы натянем на нижнюю поверхность тонкую эластичную пленку. Получим тело ограниченное с "боков" цилиндром Γ, а снизу выпуклой оболочкой. Нижняя поверхность этого тела будет состоять из выпуклых участков и "плоскостей" (измерения[1]) от 1 до z), проходящих через крайние[2]) точки поверхности $B = B(u)$. Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_k$ - управления, соответствующее крайним точкам плоских участков. Тогда на плоских участках, согласно определения выпуклой оболочки, любое B может быть представлено в виде[3]).

$$B = \sum_{j=0}^{\ell} d_j \, B(u^j) \quad \ell+1 \leq z, \ \sum_{j=0}^{\ell} d_j = 1, \ d_j \geq 0, \tag{6.1}$$

где $B(u^j)$ - значения B в крайних точках u^j, через которые проходит данная плоскость, а d_j определяются точкой плоскости.

Исключим d_0 из 1-го равенства в (6.1) при помощи 2-го уравнения. Получим

$$B = B(u^0) + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left[B(u^j) - B(u^0) \right], \ 0 \leq d_j \leq 1. \tag{6.2}$$

----

1) Т.е. "плоскость" может быть и просто прямой.

2) Точка А называется крайней точкой выпуклого тела, если А не является внутренней точкой любого отрезка, принадлежащего этому телу.

3) Данилов В.П. и др., Математический анализ, СМБ, ФМ, 1961г., стр.91.

156

Каждому значению вектора u , соответствует точка плоскости и значение α_j . Поэтому α_j в (6.2) играет роль управления и может рассматриваться как управление, вместо u на плоских участках.

Когда все плоскости выпуклой оболочки не параллельны координатной плоскости управления u (содержащей U), то точная нижняя грань $\inf\limits_u B$ принадлежит либо точке на выпуклом участке, либо границе области. Выпуклая оболочка в этом случае не оказывает влияния на ход экстремали. Однако, когда одна из плоскостей того или иного (не нулевого) измерения, становится параллельной координатной плоскости управления u , т.е. когда более 2-х точек u^+ становятся точками инфинума, положение коренным образом меняется. Появляются новые управления α_j .

Замечая , что функция B в (6.2) фактически составлена для уравнений вида

$$\dot{y}_i = f_i(x,y,u^0) + \alpha_j [f_i(x,y,u^+) - f_i(x,y,u^0)] \quad i = 0,1,\dots,n, \qquad (6.3)$$

видим, что эти уравнения являются частным случаем связей (2.2). Следовательно, все результаты по особым экстремалям применимы для этого случая. В итоге мы найдем решение в классе кусочно-гладких кривых $y(x)$, для некоторого фиктивного управления.

Естественно поставить вопрос: имеет ли смысл найденное решение и может ли оно быть реализовано системой исходных уравнений (4.1)? Покажем, что это решение является замыканием, предельным элементом, класса допустимых непрерывных кусочно-дифференцируемых кривых $y(x)$, когда число переключений управления (число угловых точек на $y(x)$) стремится к бесконечности. В самом деле, перемещение в фазовом пространстве xy , соответствующее любому управлению с плоскости выпуклой оболочки при достаточно малом изменении x может быть аппроксимировано смещением по направлениям, соответствующим крайним точкам плоских участков. Причем чем чаще переключения, тем меньше отклонение от найденной специальной экстремали, тем ближе величина функционала к найденной предельной величине.

Обсуждение. Методом построения выпуклой оболочки, решение системы (4.1) для управления $u(x)$ находится в классе непрерывных кривых $y(x)$, не имеющих в каждой точке производной. Этот класс является более широким, чем класс непрерывных и кусочно-дифференцируемых кривых, с которыми имеют дело в известных методах. Поэтому согласно принципу расширения /7/ абсолютная минималь находится среди специальных минималей (заданных на $[t_1, t_2]$), если они удовлетворяют достаточным условиям, заданным граничным значениям и если минимум существует.

Примеры непрерывных кривых, не имеющих в каждой точке производной, впервые были указаны Вейерштрассом. В вариационном исчислении минимум на таких кривых, по-видимому, впервые стал искать Юнг /74/, затем появились работы /31/, /142/, в которых тип движения точки фазового пространства с возможно более частыми переключениями управления в соответствии с терминологией теории автоматического управления был назван "скользящим режимом". Однако ни одна из указанных работ не содержит алгоритма для расчета скользящих режимов, условий входа, движения и выхода из скользящего режима, порядка вырождения вариационной задачи[1)].

Замечания. 1. Т.к. $\inf_u B(u) = -\sup_u H(u) + \psi$, то вместо $\inf_u B(u)$ можно рассматривать везде $\sup_u H(u)$.

2. По особой экстремали можно идти и в скользящем режиме.

Пример 6.1.

$$I=\int_{-2}^{2}[x^2-2t^3x-e^tu^2-t^2u^4)dt, \quad \dot{x}=u, \; x(-2)=-1, \; x(2)=1, \quad |u|\le 1.$$
$$H=pu-x^2+2t^3x+e^tu^2+t^2u^4, \qquad (6.4)$$

---

1) В работе /31/ стр. 590 приводится система уравнений типа (4.3) /1/ (результат 1-го дифференцирования) для расчета α_j . Однако, как показано в данной главе (§ 2) такое решение не оптимально. Неверно в /31/ указан и порядок вырождения вариационной задачи.

158

Зависимость $H=H(u)$ имеет вид, показанный на фиг. 6.16. Максимумов два, следовательно, возможен скользящий режим. Строим выпуклую оболочку (фиг. 6.17) и систему (6.4) записываем в виде

$$I=\int_{-2}^{2}[x^2-2t^3x-e^tu_0^2-t^2u_0^4+\alpha_1(-e^tu_1^2-t^2u_1^4+e^tu_0^2+t^2u_0^4)]\,dt, \qquad (6.5)$$

$$\dot{x}=u_0+\alpha_1(u_1-u_0), \quad 0<\alpha_1<1.$$

где u_0, u_1 - значения u соответствующие 1-му и 2-му максимумам. Как видно из фиг 6.17: $u_1=-u_0=1$.

Составляя H для системы (6.4), вычисляя $H_{\alpha_1}=0$, видим, что α - - особое управление. *Ищем особ. экстремаль*

$$H_{\alpha_1}=p(u_1-u_0)+e^tu_1^2+t^2u_1^4-e^tu_0^2-t^2u_0^4=0.$$

Подставляя $u_1=-u_0=1$, получаем, что на скользящем режиме $p=0$

При этом $H(u_0)=H(u_1)$ (хотя бы в силу четности $H(u)$ при $p=0$).

Далее $\dot{H}_\alpha=\dot{p}=-2x+2t^3=0.$

Откуда находим особую экстремаль или как ее иногда называем "линию нулевой близости" скользящего режиме: $x=t^3$. Далее

$$\ddot{H}_{\alpha_1}=-2[-1+2\alpha_1]+6t^2=0, \quad \alpha_1=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ddot{H}_{\alpha_1}=-4<0. \qquad (6.6)$$

Необходимое условие оптимальности скользящего режима, как видно из последнего выражения в (6.6) - выполнено во всей плоскости. Следовательно минимум сильный. Из условия $0<\alpha_1<1$ находим участок скольжения $-\sqrt{\frac{1}{3}}<t<\sqrt{\frac{1}{3}}$. Экстремаль имеет вид показанный на фиг. 6.18.

Пример 6.2. Задача входа космического корабля в атмосферу планеты[1]. Если считать, что полет происходит в плоскости большого круга, летательный аппарат - материальная точка, планета не вращается, то уравнения, описывающие движение на участке входа, имеют вид

$$\dot{H}=V\sin\theta, \quad \dot{V}=-\frac{X}{m}-g\sin\theta, \quad \dot{\theta}=\frac{Y}{mV}-\frac{g\cos\theta}{V}+\frac{V\cos\theta}{R}. \qquad (6.7)$$

---

[1] Подобная задача решалась также В.Ф.Кротовым и В.И.Гурманом.

Здесь H - высота, V - скорость полета, θ - угол наклона траектории к местной линии горизонта, $X = X(\alpha, V, H)$ - сопротивление (α - угол атаки), g - ускорение притяжения планеты, $Y = Y(\alpha, V, H)$ - подъемная сила, R - расстояние до центра планеты. Точка обозначает дифференцирование по времени t.

Считаем, что g = пост., зависимость $Y = Y(\alpha)$ - линейная, $X = X(\alpha)$ - симметричная парабола, $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ и $\alpha_{min} = -\alpha_{max}$. Следовательно

$$X(\alpha_{min}) = X(\alpha_{max}), \; Y(\alpha_{min}) = -Y(\alpha_{max}). \qquad (6.8)$$

Граничные условия $t_0 = 0,\ H = H_0,\ V = V_0,\ \theta = \theta_0,\ t = t_1,\ H = H_1 < H_0,\ \theta = \theta_1,\ V = V_1,\ t_1 = min.$

Если в данной задаче построить функцию $H = H(\alpha)$, где $H = p_i f_i$, то при $p_2 < 0$ эта функция будет иметь два максимума. Один, когда $\alpha = \alpha_{max}$ и второй, когда $\alpha = \alpha_{min}$. (фиг. 6.19а). Построим выпуклую оболочку (фиг. 6.19б). Получим линейное управление. Когда $H(\alpha_{min}) = H(\alpha_{max})$ - существует участок особой экстремали, который необходимо аппроксимировать скользящим режимом.

Уравнения (6.3) в данной задаче ($u_0 = \alpha_{min}, u_1 = \alpha_{max}$) с учетом (6.5), таковы

$$\dot{H} = V\sin\theta,\ \dot{V} = -\frac{X_{max}}{m} - g\sin\theta,\ \dot{\theta} = (2\xi_1 - 1)\frac{Y_{max}}{mV} - \frac{g\cos\theta}{V} + \frac{V\cos\theta}{R}. \qquad (6.9)$$

Здесь особое управление обозначено через $\xi_1 (0 \leq \xi_1 \leq 1)$. Поскольку оно входит только в уравнение для $\dot{\theta}$, то на участке скользящего режима это уравнение может быть отброшено, а в оставшейся системе $\sin\theta$ становится управлением.

Рассматривая два оставшихся уравнения видим, что если ввести обозначение $\sin\theta = u$, то снова будем иметь линейное, т.е. особое управление $|u| \leq 1$.

Запишем новую функцию $H = p_i f_i$ и найдем минимум по θ. Если $p_1 V - p_2 g > 0,\ \theta = \pi/2$; если $p_1 V - p_2 g < 0,\ \theta = -\pi/2$, если $p_1 V - p_2 g = 0$ -

-особый режим. Дифференцируя последнее равенство по t получим - $-p_1 X - p_2(VX'_H - gX'_V) = 0$. Это уравнение не содержит θ и вместе с предыдущим является условием входа в скользящий режим. Чтобы два эти уравнения имели решение при $p_1, p_2 \neq 0$, определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая этот определитель, получим

$$-X + V(VX'_H - gX'_V) = 0. \qquad (6.10)$$

Это сравнение дает связь между H и V. Решение этого уравнения в плоскости H-V определяет кривые $H = H(V)$. Для реальной поляры таких кривых может быть несколько. Скользящему режиму соответствует кривая с наибольшим сопротивлением. Дифференцируя (6.10) по t, получим формулу для расчета θ, а вычисляя $\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right] > 0$ - условие оптимальности скользящего режима.

Типичная кривая входа показана на фиг. 6.20. Она состоит из участка выхода на особую экстремаль, скользящего режима по углу атаки вдоль особой экстремали и участка схода в особой экстремали в заданные граничные условия на правом конце.

Таким образом, вместо решения сложной системы дифференциальных уравнений 3-го порядка, на участке скользящего режима мы смогли получить решение в замкнутом виде.

С физической стороны оно говорит о том, что при торможении аппарат должен создавать максимальное сопротивление. Скользящий режим можно реализовать аппроксимируя особую экстремаль допустимой частотой переключения управления, оценив проигрыш в величине функционала.

<u>Пример 6.3</u> (на скользящую экстремаль с двухкратной особенностью). Найти экстремали в задаче

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T (x_1^2 + x_2^2 - u_1^2 - u_2^2)\,dt, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \qquad (6.11)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_1(T) = x_{1K}, \quad x_2(T) = x_{2K}. \qquad (6.12)$$

Предполагается, что $x_{10}, x_{20}, x_{1K}, x_{2K}$ - достаточно близки к 0, а T - достаточно велико.

Согласно (6.3) на участке скольжения будем иметь

$$\dot{I}=\frac{1}{2}[x_1^2+x_2^2-(u_1^\circ)^2-(u_2^\circ)^2],\ \dot{x}_1=u_1^\circ+\alpha_1(u_1^1-u_1^\circ),\ \dot{x}_2=u_2^\circ+\alpha_2(u_2^1-u_2^\circ),\ |\alpha_1|\le 1,\ |\alpha_2|\le 1, \tag{6.13}$$

где $u_1^\circ=u_2^\circ=-1,\ u_1^1=u_2^1=1$. Подставляя эти значения, получим

$$\dot{I}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-2),\ \dot{x}_1=-1+2\alpha_1,\ \dot{x}_2=-1+2\alpha_2,\ \ |\alpha_1|\le 1,\ |\alpha_2|\le 1. \tag{6.14}$$

На участке скольжения мы получили задачу с особыми управлениями α_1 , α_2 . Решаем эту задачу по теории § 2:

$$H=p_1(2\alpha_1-1)+p_2(2\alpha_2-1)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-2). \tag{6.15}$$

$$\dot{p}_1=x_1,\ \dot{p}_2=x_2, \tag{6.16}$$

$$H_{\alpha_1}=2p_1=0,\ H_{\alpha_2}=2p_2=0,\ \dot{H}_{\alpha_1}=2x_1=0,\ \dot{H}_{\alpha_2}=2x_2=0, \tag{6.17}$$

$$\ddot{H}_{\alpha_1}=2(2\alpha_1-1)=0,\ \ \ddot{H}_{\alpha_2}=2(2\alpha_2-1)=0. \tag{6.18}$$

Из этих выражений следует, что возможны два типа особых экстремали с простой особенностью: первые расположены в фазовом пространстве на гиперплоскости $x_1\equiv 0$ ($\alpha_1=1/2$), вторые – на гиперплоскости $x_2\equiv 0$, ($\alpha_2=1/2$). Кроме того имеется скользящая экстремаль с двукратной особенностью, расположенная на пересечении обеих гиперплоскостей. Ее уравнение: $x_1\equiv 0$, $x_2\equiv 0$, а соответствующее ей управление $\alpha_1=\alpha_2=1/2$. Необходимое условие оптимальности (2.3) на ней – выполнена. В самом деле согласно критерия Сильвестра

$$\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0,\quad 2>0,\ 2>0,$$

что свидетельствует о положительности квадратичной формы (2.3). Условием входа является выполнение (6.17).

Синтез при входе на особые экстремали показан на фиг. 6.21, а при сходе на фиг. 6.22. Движение в общем случае идет вначале по границе обеих управлений, затем по скользящей экстремали с порядком особенности 1 (скольжение в одной плоскости), а затем по скользящей экстремали с порядком особенности два (скольжение в 2-х плоскостях одновременно). При сходе картина обратная.

Приведен пример, в котором совместное использование импульсных и скользящих экстремалей позволяет получить решение на элементах, которые вообще не являются даже функциями.

Пример 6.4. Найти минимум функционала

$$I=\int_0^1 (x_2^4-x_2^2+x_1^2)\,dt\,,\quad \dot x_1=x_2\,,\quad \dot x_2=u\,,\quad x_1(0)=x_1(1)=0,\ x_2(0),\ x_2(1)\text{ - заданы} \qquad (6.19)$$

Т.к. u -неограничено, то согласно гл.3 и как видно из 3-го уравнения в (6.19) можно реализовать с любой точностью разрыв $x_2(t)$ в любой точке. При этом потеря в величине функционала I при достаточной величине u может быть сделана как угодно малой (ибо $\varphi_1=0$, см.гл.5). Имея это в виду, можно рассматривать $x_2(t)$ как неограниченную функцию, способную терпеть разрывы на множестве меры нуль. Но в этом случае граничные значения для $x_2(t)$ перестают играть какую-либо роль, ибо они всегда могут быть выполнены за счёт разрывов в конечных точках.

Найдем абсолютный минимум подинтегрального выражения в (6.19), получим: $x_2=\pm 1/\sqrt{2}$, $x_1\equiv 0$. Рассмотрим, может ли быть реализована кривая $x_1(t)$ на допустимых элементах. Разделим отрезок интегрирования $[0,1]$ на интервалы $\Delta t=1/n$. Пронумируем их: Δt_i, $i=1,2,\ldots,n$. Зададим $x_2(t)$ следующим образом

$$x_{2n}(t)=\begin{cases}1/\sqrt{2} & \text{на } \Delta t_i,\ \text{если } i\text{-нечетное},\ i=1,2,\ldots,n,\\ -1/\sqrt{2} & \text{на } \Delta t_i,\ \text{если } i\text{-четное},\ \sum \Delta t_i=1.\end{cases} \qquad (6.20)$$

Тогда согласно 2-го уравнения в (6.19) и граничного условия $x_1(0)=0$, получим кривую $x_{1n}(t)$, которая при $n\to\infty$ будет равномерно стремиться к предельной кривой $x_1(t)\equiv 0$, а функционал I в (6.19) будет стремиться к своей нижней грани. Но любой член последовательности $\{x_{2n}(t)\}$, $n=1,2,\ldots$ может быть как угодно точно реализован при достаточной величине u, следовательно, на допустимых элементах мы как угодно близко можем подойти к $\inf I$ на X^*. Однако предельные элементы, на которых достигается $\inf I$, не является даже функциями (за исключением $\bar x_1(t)$), ибо $\bar x_2(t)$ $\bar u(t)$ -неопределено ни в одной точке t $(\bar x_2(t)=\pm 1/\sqrt{2}\ ?,\ \bar u(t)=\pm\infty)$. Интересно, что несмотря на это, функционал на $\bar x_2(t)$, $\bar u(t)$ – определен.

Выводы и основные результаты

1. Рассмотрены специальные экстремали в задачах оптимального управления. Введены понятия, которые имеют важное значение для последующего построения теории специальных экстремалей, такие как: порядок особенности экстремали, частный и общий порядок сложности особой экстремали, экстремали с простой и сложной особенностью, многократные экстремали.

2. Получены новые необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа равенств и неравенств (теоремы 2.1-2.4).

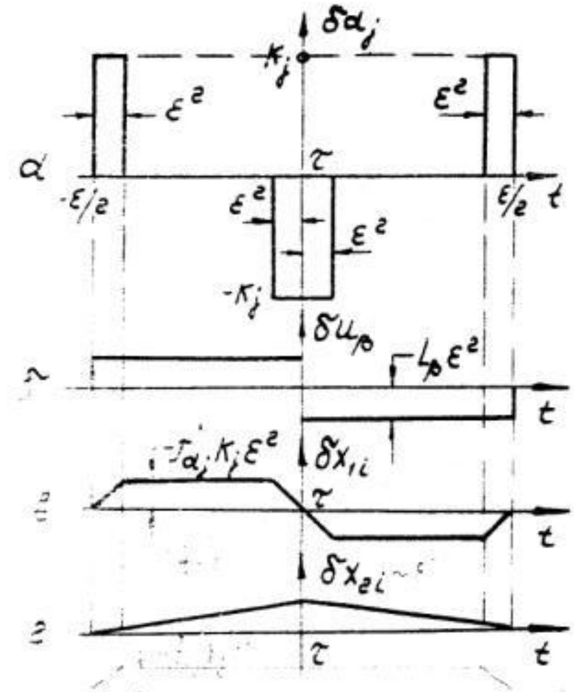
3. Доказана теорема о порядке вырождения особых экстремалей, теоремы об условиях входа и схода. Показано, что особые экстремали с порядком сложности два в достаточно малой окрестности особой экстремали будут иметь осциллирующий вход и сход. Установлены условия вычисления особого управления.

4. Проделан в общем случае синтез ряда довольно общих систем 2-го и 3-го порядков, содержащих специальные экстремали, а также одной системы n -го порядка. В последнем случае приводятся условия инвариантности этой системы.

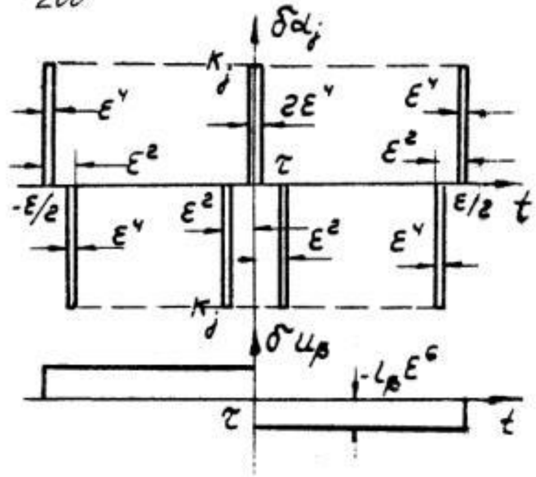
5. Показано, что при прочих равных условиях абсолютная минималь может содержаться среди особых минималей, а потому в технических задачах нельзя пренебрегать особыми минималями.

6. Проанализирован случай общих связей. Получены необходимые условия существования особых экстремалей, порядок вырождения вариационной задачи, условия входа в особый режим в общем случае. Сформулирована и доказана теорема, позволяющая отыскивать дополнительные связи (условия типа равенств), наложенные на систему.

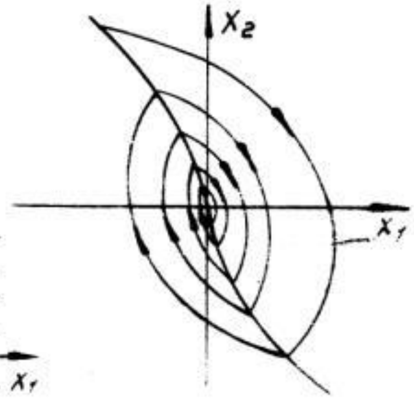
3. Показано, что скользящие режимы являются частным случаем особых режимов, а потому вся теория особых экстремалей применима и к анализу скользящих режимов.



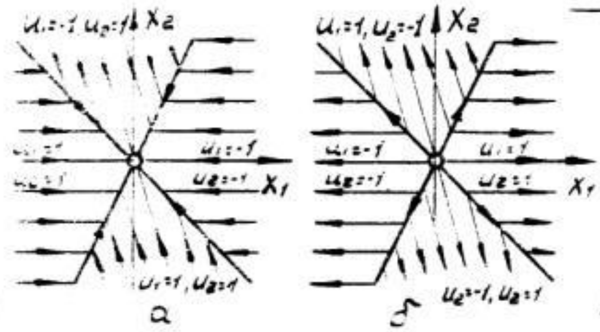
фиг. Б.1



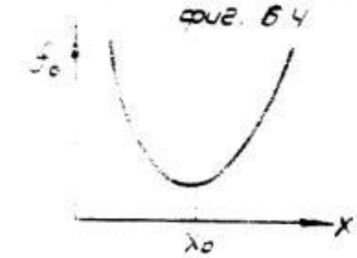
фиг. Б.2



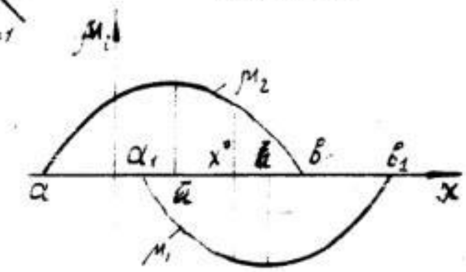
фиг. Б.3



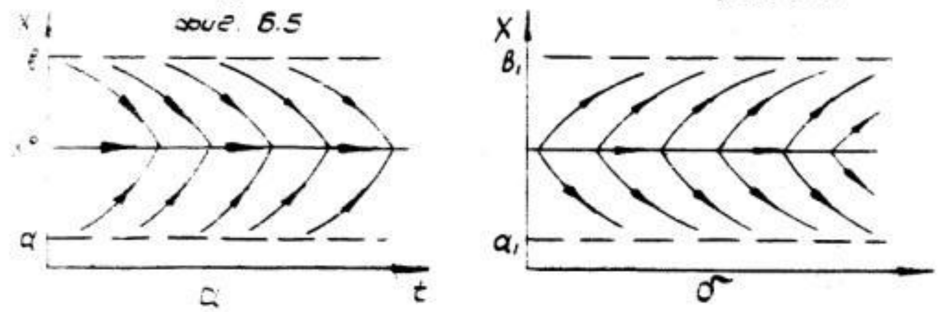
фиг. Б.4



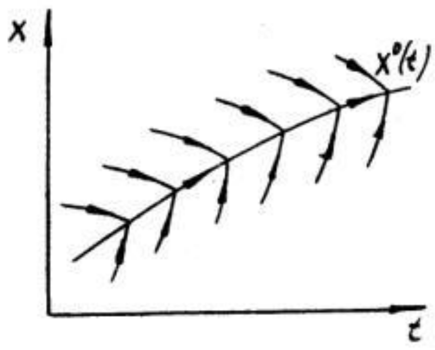
фиг. Б.5



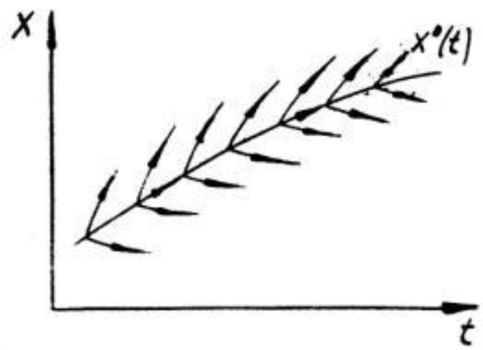
фиг. Б.6



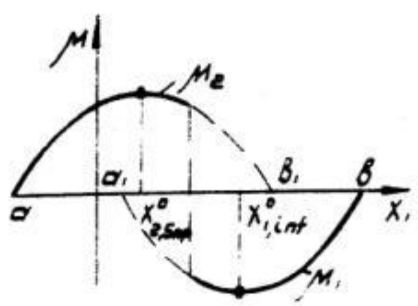
фиг. Б.7



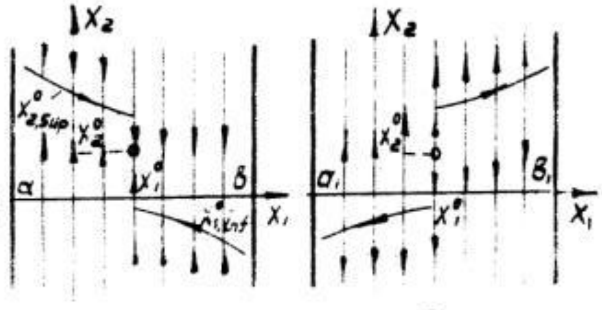
фиг. 6.8



фиг. 6.9



фиг. 6.10

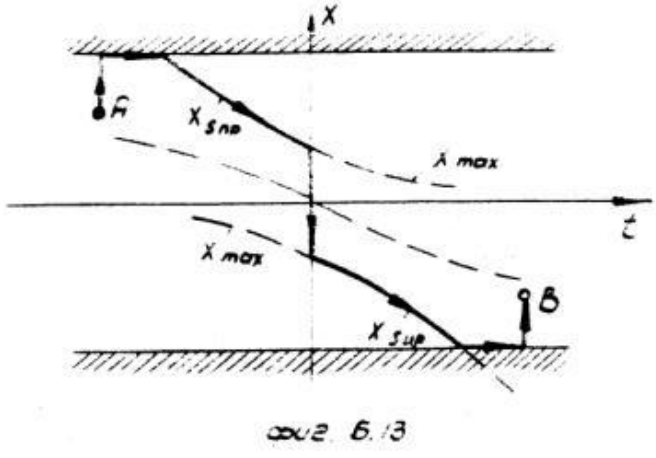


а б

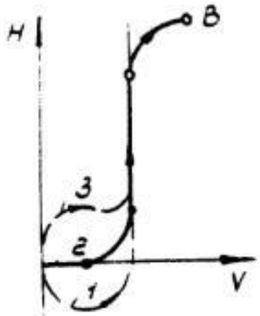
фиг. 6.11

а б

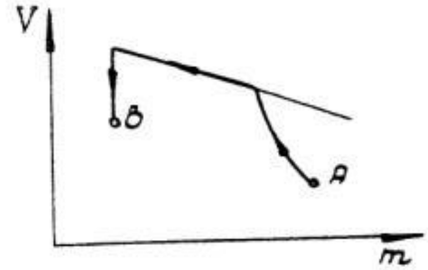
фиг. 6.12



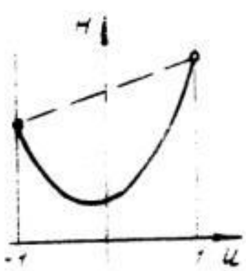
фиг. 6.13



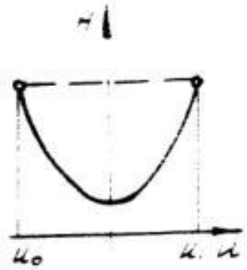
фиг. 6.14



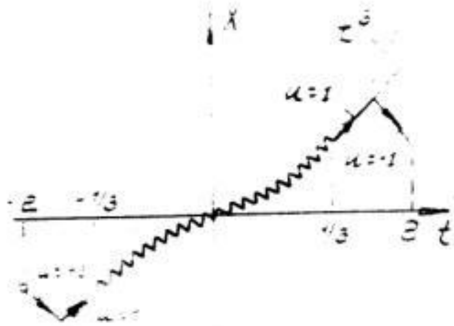
фиг. 6.15



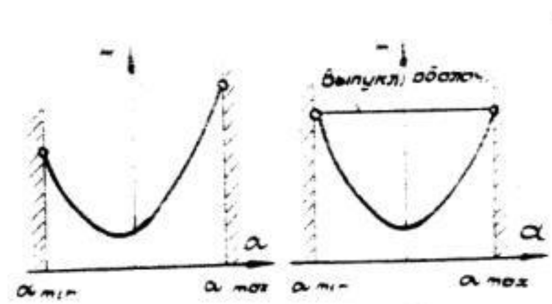
фиг. 6.16



фиг 6.17

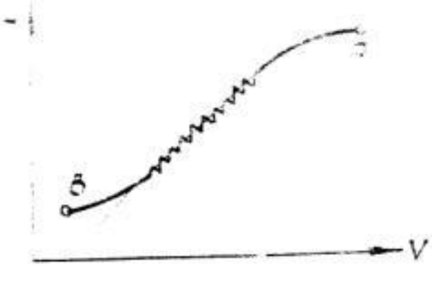


фиг 6.18

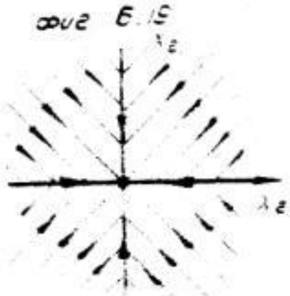


а

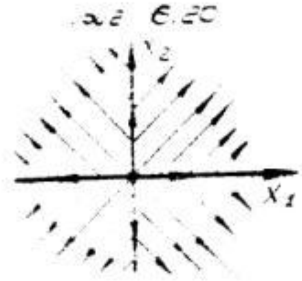
фиг 6.19



фиг 6.20



фиг 6.21



фиг 6.22

ГЛАВА 7

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ И РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Попытки применения классического вариационного исчисления и принципа максимума Л.С. Понтрягина к техническим задачам оптимального управления в большинстве случаев разбиваются о невозможность решить краевую задачу.

В этой главе обсуждается разрешимость краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. На простых примерах показано, что эти трудности возникают не потому, что "плохи" методы решения краевых задач, а потому, что оставаясь в рамках классического вариационного исчисления и принципа максимума, многие краевые задачи решить невозможно. Включение в состав экстремалей специальных режимов (особых, скользящих и импульсных) позволяет избежать многих трудностей.

Предлагаются методы, преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки" и удаления сопряженных точек

§ 1. Введение

Напоминаем, что типичная задача оптимального управления заключается в следующем. Требуется найти минимум функционала

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt . \qquad (1.1)$$

на который наложены независимые дифференциальные связи

$$\dot{x}_i = f_i\,(t,x,u) \qquad i=1,2,\dots n. \qquad (1.2)$$

Здесь $x(t)=\{x_1(t),\dots,x_n(t)\}$ - n - мерная непрерывная вектор функция фазовых координат; $u(t)=\{u_1(t),\dots,u_r(t)\}$ - r - мерная кусочно-непрерывная вектор-функция управления, принадлежащая ограниченной области U типа: $u_{j\,min}\le u_j\le u_{j\,max}$.

----

1) Опубликовано полностью в /2/.

Граничные значения x для простоты будем считать фиксированными $x_i(t_1)=x_{i1}$, $x_i(t_2)=x_{i2}$, $t_1=a$, $t_2=b$.

Как известно, уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса в вариационном исчислении либо принцип максимума Понтрягина/28/ приводят к уравнениям и условию

$$\lambda_i' = -H_{x_i} \quad i=1,\dots,n, \quad \bar{H} = \sup_{u\in V} H, \tag{1.3}$$

где $H=\lambda_i f_i(t,x,u)$, λ_i - неопределенные множители Лагранжа. Таким образом, задача оптимального управления сводится к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3), (1.1), (1.2), т.е. к подбору таких начальных $\lambda_i(t_1)$, чтобы получить заданные x_{i2}.

Для решения краевой задачи применяют либо метод наискорейшего спуска, либо метод Ньютона /50/.

Метод наискорейшего спуска заключается в минимизации невязки

$$M=\tau_i\,[x_i(t_2)-x_{i2}]^2, \tag{1.4}$$

где $\tau_i>0$ - некоторые весовые коэффициенты, а метод Ньютона в определении поправок $\Delta\lambda_i(t_1)$ из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial\lambda_i}\Delta\lambda_i=\varphi_k \qquad k=1,2,\dots,n, \tag{1.5}$$

где $\varphi_k=x_k(t_2)-x_{k2}$. Оба эти метода дают способы для определения такой последовательности начальных векторов $\lambda(t_1)$, чтобы M и φ_k убывали.

Как принцип максимума так и классическое вариационное исчисление производят на прикладников больше впечатление простотой алгоритма для расчета оптимальных траекторий. Однако при применении этих методов к большинству достаточно сложных практических задач, как правило, не удается решить краевую задачу, несмотря на большие расходы машинного времени. Типичные трудности, которые при этом возникают: отсутствие сходимости, большая чувствительность траектории к незначительным изменениям начальных значений неопределенных множителей $\lambda(t_1)$, попадание в местные "ямы" и т.п.

Разные усовершенствования и применение других методов решения краевых задач - обычно не помогает. Вместе с тем существование оптимального решения для заданных краевых условий бывает ясно из физических соображений или следует из теоремы Филиппова/49/, ибо неоптимальные траектории, соединяющие заданные точки, существуют.

§ 2. Существование специальных режимов - главная причина невозможности решить многие краевые задачи в рамках прежних методов

В гл. 6, 5 мы разбирали три вида специальных экстремалей: особые, скользящие и импульсные.

Покажем на простейших примерах к каким последствиям в решении краевой задачи приводит наличие таких режимов.

Пример 2.1. Найти минимум функционала

$$I=\int_0^3 x^2 dt, \quad \dot{x}=u, \quad |u|\le 1, \quad x(0)=1, \quad x(3)=a. \qquad (2.1)$$

Пользуясь процедурой принципа максимума, получим

$$H=\lambda u-x^2, \quad \dot{\lambda}=2x, \quad u=\operatorname{sign}\lambda, \quad x=\pm t+C_1, \quad \lambda=\pm t^2+2C_1 t+C_2 \qquad (2.2)$$

Отсюда видно, что в верхней полуплоскости xt, λ - возрастает ($x>0$, $\dot{\lambda}>0$), в нижней убывает ($x<0$, $\dot{\lambda}<0$). Если $\lambda(0)>0$ то u = 1 и траектория будет иметь вид, отмеченный на фиг.Ӏ цифрой 1. Если $-1<\lambda(0)<0$, то не доходя до линии x = 0 происходит переключение и получим траекторию вида 2,3. И, наконец, если $\lambda(0)<-1$ то траектория единственная и отмечена цифрой 5.

Таким образом, выбирая любое $\lambda(0)$ можно попасть в любую точку отрезка АБ и в отдельно стоящую точку С. Если же необходимо найти оптимальную траекторию, соединяющую $x(0)$ = 1 и точку a (фиг.Ӏ.), то в рамках принципа максимума (2.2), это просто невозможно. (фиг. Ӏ.2)
Здесь функция невязки M (1.4) и функции φ_k (1.5) - разрывны, и потому говорить о сходимости как метода наискорейшего спуска, так и метода Ньютона- бессмысленно.

Вместе с тем существование оптимальной кривой, соединяющей $x(0)=1$ и $x(3)=a$ очевидно из физических соображений, ибо функционал (2.1) можно трактовать как задачу о минимальном объеме тела вращения, когда на наклон кривой наложено ограничение $|u|\leq 1$. Это также ясно и математически, т.к. кривых, соединяющих эти точки бесконечное множество, функционал ограничен снизу, а потому среди этих кривых должна быть кривая, доставляющая минимум I .

Заметим, что на этом примере наглядно можно наблюдать неустойчивость траектории и чувствительность конечных значений фазовых координат при изменении начальных значений $\lambda(0)$. В самом деле, пусть в результате процесса итерации мы подошли к точке B . При сколь угодно малых отклонениях от значения $\lambda(0)=-1$ конечное значение $x(3)$ будет скачком переходить из B в C и обратно .

Этот элементарный пример для граничного значения $|x(3)|<1$ решается весьма просто, если в состав экстремали включить участок особого режима $x\equiv 0$. Однако на нем легко убедиться, что игнорирование существования таких участков может быть причиной неразрешимости краевой задачи и чувствительности конечных значений к варьированию начальных λ , т.к. область фазового пространства будет иметь "пустоты".

Пример 2.2. Найти минималь функционала

$$I=\int_0^3(x^2-u^2)dt,\quad \dot{x}=u,\quad x(0)=1,\quad x(3)=a,\ |u|\leq 1. \quad (2.3)$$

По принципу максимума имеем

$$H=\lambda u-x^2+u^2,\ \dot{\lambda}=2x,\quad u=sign\,\lambda,\quad x=\pm t+c_1,\quad \lambda=\pm t^2+2c_1t+c_2. \quad (2.4)$$

Несмотря на внешнее различие эта задача имеет много общего с предыдущей. Из последних 4-х выражений в (2.4) видно, что экстремали ее совпадают с экстремалями примера 1. Поэтому область достижимых конечных значений таже и если оставаться в рамках принципа максимума, то никаким подбором $\lambda(0)$ удовлетворить граничному условию $x(3)=a$ невозможно (фиг.3.1).

Здесь причина кроется в существовании в составе экстремали участка со скользящим режимом.

Пример 2.3. Найти минимум функционала

$$I=\int_{-1}^{+1} t^2u^2dt, \quad \dot{x}=u, \quad x(-1)=-1, \quad x(1)=1. \tag{2.5}$$

Согласно процедуре принципа максимума

$$H=\lambda u - x^2u^2, \quad \dot{\lambda}=0, \quad H_u=\lambda-2t^2u=0, \quad x=\frac{C_1}{t}+C_2. \tag{2.6}$$

Используя краевые условия $x(-1)=-1$, находим $C_2=-C_1-1$, или $x=\frac{C_1}{t}-C_1-1$. Задаваясь разными начальными $\lambda(-1)=-2C_1$, получим семейство траектории и функцию „невязки", показанную на фиг. 2.4, фиг. 2.3. Отсюда следует, что мы можем попасть в любую точку $x(t_2)$ при $t_2<0$ и только в точку C $(x=-1)$ при $t_2 = 1$. Однако наивыгоднейшая траектория, соединяющая точки A и B, существует, ибо существуют неоптимальные траектории, проходящие через эти точки и функционал ограничен снизу (см. (2.5)).

Здесь также мы сталкиваемся с невозможностью решить краевую задачу в рамках прежних методов. Причем "виноваты" как и ранее не методы решения краевых задач, а присутствие в составе экстремали импульсного участка.

При ознакомлении с этими примерами невольно возникают вопросы: Так ли уж часты эти специальные режимы? Не являются ли приведенные примеры плодами математической эквилибристики? Ведь обходились же без специальных режимов до сих пор!

Прежде всего покажем, что эти примеры не единичные. Аналогично строятся области достижимости в примерах $(x_0(t_2)=\min)$:

1) $\dot{x}_0=x^2+2x-tu, \quad \dot{x}=u, \quad |u|\le a, \quad t_2>t_1, \quad a>0;$

2) $\dot{x}_0=x^2-2x\sin t-u^4+\sin^2 t-u^2, \quad \dot{x}=u, \quad |u|\le a, \quad a>0.$

Или в более сложных пространственных случаях

3) $\dot{x}_0=x_1^2+x_2^2, \quad \dot{x}_1=u_1, \quad \dot{x}_2=u_2, \quad |u_1|\le 1, \quad |u_2|\le 1;$

4) $\dot{x}_0=x_1^2+x_2^2-u_1^2-u_2^2, \quad \dot{x}_1=u_1, \quad \dot{x}_2=u_2, \quad |u_1|\le 1, \quad |u_2|\le 1.$

Относительно распространенности специальных режимов можно ответить следующее. Да эти режимы отсутствуют, если система уравне ний (1.1), (1.2) линейная как по управлению, так и по фазовым координатам, лиос функция $H=H(u,x,\lambda)$ выпуклая по u при любых x и λ.

Что же касается общего случая, то скользящие режимы, вообще говоря при некоторых граничных значениях почти неизбежны, если функция $H=H(x,\lambda,u)$ при каких-то комбинациях x, λ имеет два или более минимума, т.е. они возникают, если оптимальное управление может иметь переключения, что в большинстве случаев имеет место. Импульсный режим возможен, если существуют такие комбинации x, λ, что $\sup\limits_u H = \infty$. И особый режим возможен, когда в нелинейной задаче одно или несколько управлений входят линейно.

Если обратиться к задачам техники, например, из области динамики полета, то можно убедиться, что специальные режимы имеют место в большинстве задач. Так, если зависимость тяги двигателя от расхода топлива линейная, то при оптимизации работы двигателей возникает особый режим. Если характеристика нелинейная, то скользящий. Если величина тяги не ограничена (что принимается во многих задачах ради упрощения решения), возникает импульсный режим. Таким образом во всех основных оптимальных задачах динамики таких как наивыгоднейшая траектория полета ракеты, вход космического корабля в атмосферу, переход спутника с орбиты на орбиту, задача о максимальной дальности горизонтального полета самолета и других - содержатся специальные режимы. Существование последних и является главной причиной тех трудностей в решении задач динамики полета, с которыми исследователи сталкиваются в настоящее время.

Градиентные методы решения оптимальных задач не в состоянии помочь в таких случаях, т.к. они позволяют отыскивать только слабый минимум и не могут служить средством борьбы со специальными режимами, которые являются порождением требований сильного минимума.

§ 3. Сопряженные точки - источник местных "ям" и ложных решений

Другой источник неприятностей в решении краевых задач - возможность присутствия сопряженных точек на исходном приближении, с которого мы начинаем процесс итераций. Однако, трудности, которые при этом возникают, совсем иного порядка, чем трудности от специальных режимов. Они приводят не к появлению "пустот" или "мертвых зон" в пространстве tx, а к местным "ямам" в зависимости "невязки" конечных значений как функции начальных λ и к ложным решениям. Под последними понимается экстремали, которые удовлетворяют заданным граничным условиям, но тем не менее функционал на них не достигает минимума.

Продемонстрируем это явление на примере известной задачи о брахистохроне.

Пример 3.1 (Задача о брахистохроне). Найти кривую, соединяющую заданные точки A и B, двигаясь по которой из точки A под действием силы тяжести (трением и сопротивлением среды пренебрегаем) материальная точка достигнет точки B в минимальное время /25/.

Возьмем точку A за начало координат, направим ось X горизонтально, ось y - вертикально вниз. Задача описывается уравнениями

$$T=\frac{1}{2g}\int_0^{x_1}\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{1+u^2}\,dx, \quad \dot{y}=u, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1, \quad g=const. \qquad (3.1)$$

Как известно, /25/ стр. 35, ее решением является циклоида, уравнение которой с учетом граничного значения $y(0)=0$ принимает вид

$$x=c(\tau-\sin\tau), \quad y=c(1-\cos\tau) \quad , \text{ где } \tau \text{ - параметр.} \qquad (3.2)$$

Постоянная c - радиус катящегося круга, находится из условия прохождения через заданную точку $y(x_1)$.

Пусть мы задались некоторым значением C и в результате расчета получили траекторию, изображенную на фиг.15-а. Эта траектория содержит сопряженные точки a, δ и имеет "невязку" граничных условий $M=(EB)^2$. Пусть в результате некой процедуры решения краевой задачи C изменяется так, что невязка EB уменьшается. В результате наступит момент, когда вершина циклоиды станет на одну линию с B, и смещение как в ту, так и в другую сторону будет увеличивать невязку. (Фиг.3.5-б). Между тем краевая задача еще не решена, точка E не совместилась с точкой B. В зависимости $M=M(c)$ получилась местная "яма".

Если эту яму преодолеть, то можно решить граничную задачу, но это решение будет ложным, т.к. экстремаль будет содержать сопряженную точку a (фиг.3.5-в) и не доставит минимума интегралу (3.1).

Зависимость невязки M от C представлена на фиг.3.6. Значение C_1 соответствует местной "яме". В подобные "ямы" приведет метод наискорейшего спуска, если процесс итерации начался со значения $C<C_2$ (фиг.3.6). Для всех значений $C_2<C<C_4$ итерации приведут к ложному минимуму и лишь для значений $C>C_4$ к решению краевой задачи, доставляющей минимум интегралу (3.1). Эти значения характеризуются тем, что процесс приближений начинается с траектории <u>не содержащей сопряженных точек</u> (фиг.3.5-г, траектории 1,2).

Укажем еще два примера, в которых процесс уменьшения невязки, начатый с ложной минимали, приводит к ложному минимуму:

1) $\dot{I}=\frac{x}{u^2}$, $\dot{x}=u$, $x(0)=1$, $x(a)=b$, $a>0$, $0<b<1$;

2) $\dot{I}=\sqrt{x+h}/\sqrt{1+u^2}$, $\dot{x}=u$, $x(0)=0$, $x(a)=x_1>-h$, $h>0$.

Основываясь на геометрических соображениях, автор берет на себя смелость высказать в качестве гипотезы следующее предложение.

<u>Предложение 3.1</u>. Пусть область фазового пространства tx, занятая экстремалями, односвязна и не содержит внутренних пустот. Пусть экстремали этого пространства содержат только сопряженные точки ти-

па касательной к огибающей или точек возврата[1]), а конечные значения t, x – фиксированы.

Тогда процесс решения краевой задачи методом наискорейшего спуска или методом Ньютона, производимый с достаточно малым шагом и начатый с ложной экстремали приведет либо к местной "яме", либо к ложному минимуму.

Сопряженные точки не единственная причина местных "ям". Специальные режимы также приводят к местным "ямам" и возможно, что даже чаще, чем сопряженные точки.

Пример 3.1. Найти минимум функционала

$$\dot{x}_0 = e^{-x^2}, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 3, \quad x(0) = 0, \quad x(3) = 1. \qquad (3.3)$$

По принципу максимума

$$H = \lambda u - e^{-x^2}, \quad \dot{\lambda} = -2xe^{-x^2}, \quad u = sign\,\lambda, \quad x = \pm t + c. \qquad (3.4)$$

Экстремали имеют вид, показанный на фиг. 3.7. Легко видеть что процесс итераций по уменьшению "невязки" начатый с экстремали 1 или 2 приведет к местной "яме".

То же самое и относится к примерам

1) $\dot{x}_0 = -ch\,x \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1.$

2) $\dot{x}_0 = \dfrac{u^3}{a^2 + x^3}, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad a > 0.$

Что делать?

Такой вопрос неизбежно возникает у читателя. Важно не только установить диагноз болезни, но и указать средства для ее лечения.

В качестве такого средства автор и предлагает метод решения оптимальных задач (гл. 2), который в частности, дает алгоритмы и для решения задач со специальными режимами (гл. 3 - 5).

---

1) Таким образом сопряженные точки типа фокуса исключатся из рассмотрения.

73

§ 4. Некоторые рекомендации

Бороться с сопряженными точками и порождаемыми ими местными "ямами" можно, например, следующим путем. При отыскании 1-го приближения рассчитывается $n+1$ экстремалей, исходящих из одной точки $x(t_1)$ для близких $p(t_1)$, но таких, что определитель $|\delta p_{ij}(t_1)|$ $i,j=1,2,\dots,n$, где $\delta p_{ij}=p_{ij}-p_{i0}$ не равен нулю. При интегрировании на интересующем нас интервале (t_1, t_2) вычисляется определитель $|\delta x_{ij}(t)|$ $i,j=1,2,\dots,n$, где $\delta x_{ij}=x_{ij}-x_{i0}$. Если этот определитель не обращается в нуль (имеет при любом $t\in(t_1,t_2]$ тот же порядок, что и на всем интервале (t_1,t_2)), то сопряженная точка отсутствует. Если же при некотором $t_3\in(t_1,t_2)$ это условие нарушается, то вначале решается задача на максимум отрезка $t_1 t_3$, пока не станет $t_3>t_2$. Полученное решение и принимается за 1-е приближение.

Так, если вернутся к примеру 7.4 § 3, то видим, что в точке a (фиг.7.5а) определитель $|\delta x_{ij}(t)|=0$, ибо $\delta x_{11}=x_{11}-x_{10}=0-0=$ $=0$ и $\delta x_{12}=x_{12}-x_{10}=0-0=0$, следовательно, a – сопряженная точка. Решая задачу на максимум отрезка $x_1 a$ (максимум невязки $M=(a-x_1)^2$ или минимум невязки $M=-(a-x_1)^2$, удаляем сопряженную точку a из интервала интегрирования $(x_1 x_2)$ (фиг.7.5г).

Теперь, имея в качестве 1-го приближения экстремаль I (фиг.7.5г) не содержащую сопряженной точки, можно приступить к решению краевой задачи.

Продемонстрируем некоторые результаты, изложенные в гл. 5 на примере:

Пример 4.1. Найти минимум функционала

$$\dot{x}_0=\cos y, \quad \dot{x}=u, \quad |u|\le 1, \quad x(0)=0, \quad x(3\pi)=0. \tag{4.1}$$

Если воспользоваться принципом максимума, то получим

$$H=\lambda u-\cos y, \quad \dot{\lambda}=-\sin x, \quad u=\operatorname{sign}\lambda, \quad x=\pm t-c.$$

Экстремали имеют вид ломаных колеблющихся около линии $x=0$. Область достигаемости при любых $\lambda(t_1)$ изображена на фиг.7.6. Она состоит из заштрихованной площади и любой точки на линии Oa, $O\delta$. Множество экстремалей, проходящих через заданные граничные условия, бесконечно.

Исследуем этот пример при помощи метода, изложенного в диссертации. Прежде всего замечаем, что система (4.1) относится к виду (2.2) гл. 6, в котором $u=\alpha$, $\varphi_{\alpha\alpha}\equiv 0$, а потому возможен особый режим

Согласно теореме 2.4 гл. 6 на участке особого режима справедливы конечные соотношения $H_\alpha = p \equiv 0$ $(\lambda = p)$, $M=-\sin x = 0$, откуда без всяких интеграций находим, что на особом режиме $p\equiv 0$, $x=\kappa\pi$ $(\kappa=0,\pm 1,\dots)$.

По теореме 2.1 гл. 6 получаем $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] = -\cos y > 0$, что имеет место только при $x=m\pi$($m = \pm 1, \pm 3, \pm 5,\dots$). Таким образом из всех особых режимов $x=\kappa\pi$ только режимы, когда κ - нечетные, удовлетворяют необходимому условию и доставляют минимум $x_0(t_2)$. При помощи теоремы 2.9 гл. 6 находим управление на участке особого режима $u=\alpha\equiv 0$.

Условие входа в особый режим - выполнение в момент входа помимо равенства $p=0$, также равенства $x=\pm m\pi$ (для наших граничных условий $x=\pm\pi$). Начальное $p(t_1)$ подбирается, исходя из этого условия. Зато момент выхода из особого режима и направление входа произвольны и подбираются, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

Минимали с особыми режимами имеют вид, показанный на фиг.6.9 Их две и обе они абсолютные.

В заключение заметим, что скользящие режимы, которые иногда получаются при машине ввиду невозможности схода с особого режима (при попытке схода из условия $\sup_\alpha H$ нас снова отбрасывает на особый (скользящий) режим) соответствуют как раз неоптимальным особым режимам, неудовлетворяющим условиям теоремы 2.1 гл.6, Теорема 2.1 гл.6 в некотором смысле говорит о "неустойчивости" движения по оптимальному особому

175

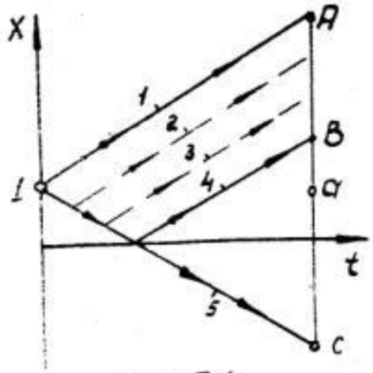
режиму, в то время как машина воспроизводит "устойчивый" неоптимальный режим. Однако машину нетрудно заставить воспроизводить именно оптимальный специальный режим, если после входа в такой режим при проверке $\sup_{\alpha} H$ менять знак H_α. Это позволит автоматически браковать неоптимальные специальные режимы (ввиду неустойчивости траектория будет сразу же с них сходить) и задерживаться на оптимальных специальных режимах. Сход же с оптимальных специальных режимов можно задавать восстанавливая знак у H_α, а направление схода прибавляя или вычитая малое число $\varepsilon>0$ к H_α.

Выводы и основные результаты гл. 7

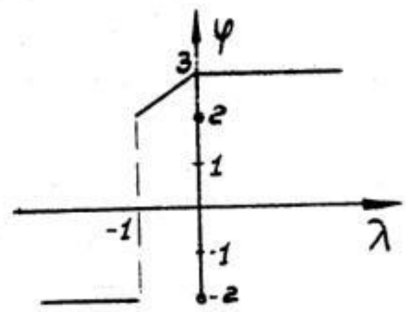
1. Рассмотрены трудности в решении краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. На простых примерах показано, что эти трудности возникают не потому, что "плохи" методы решения краевых задач, а потому что оставаясь в рамках классического вариационного исчисления и принципа максимума, многие краевые задачи решить невозможно.

2. Показано, что включение в состав экстремалей особых, импульсных и скользящих режимов позволяет избежать многих трудностей в решении краевых задач. Таким образом теория особых и импульсных режимов, рассматриваемая в гл. 6, 5 находит применение в основной проблеме оптимального управления - разрешимости краевых задач.

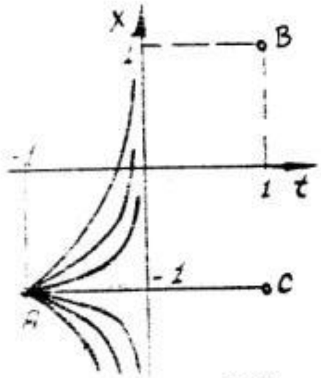
3. Предложены методы преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки" и удаления сопряженных точек.



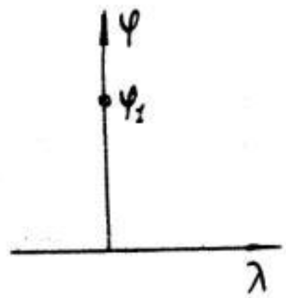
фиг. 7.1



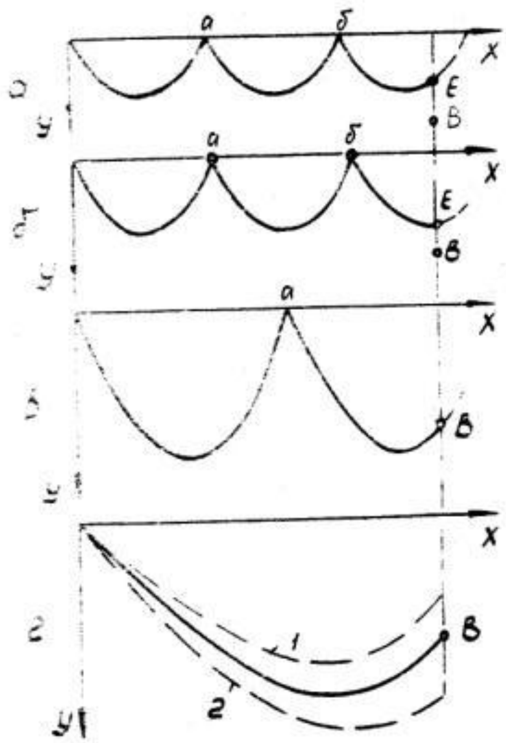
фиг. 7.2



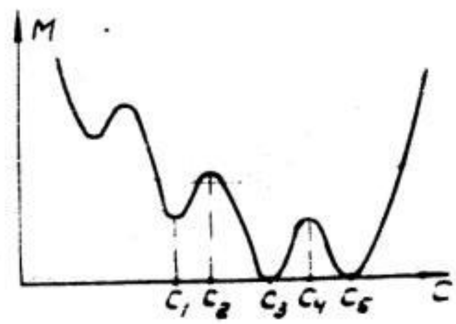
фиг. 7.3



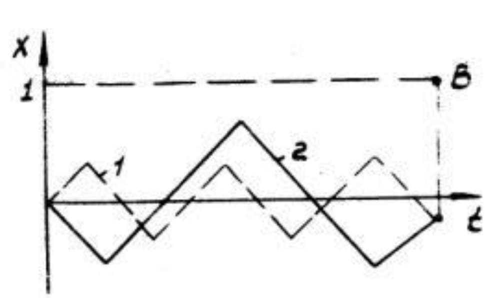
фиг. 7.4



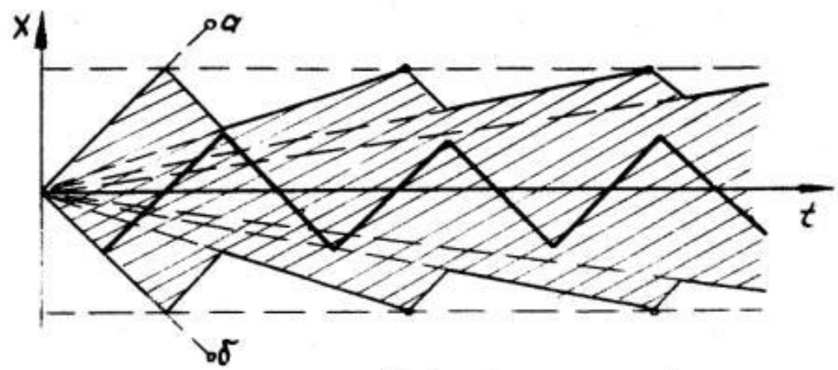
фиг. 7.5



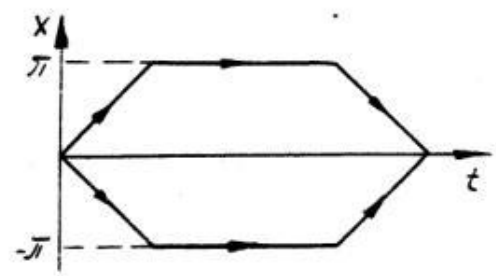
фиг. 7.6



фиг. 7.7



фиг. 7.8



фиг. 7.9

Часть II

Приложение методов ч.I к техническим задачам.

ГЛАВА 8

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИКИ

I. Задачи решения методом максимина и методами β - функционала

§I. Задача минимизации энергии сигнала.

Пусть поведение объекта описывается системой линейных уравнений

$$\dot{x}_i = a_{ij} x_j + b_i u , \qquad 0 \le t \le \infty . \tag{I.I}$$

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{2} u^2 dt , \tag{I.2}$$

при краевых условиях

$$x_i(0) = x_{i0} , \qquad x_i(\infty) = 0 . \tag{I.3}$$

В [IOI] стр.4I2 показано, что этот функционал часто связан с энергией сигнала $u(t)$, например в электрических цепях, в регулировании положения ротора двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения и т.д. Поэтому эта задача и получила название задачи о минимуме энергии сигнала [IOI]. С математической точки зрения функционал (I.3) дает оценку величины "стоимости" управления.

Решим эту задачу методом максимина[I)]. Возьмем $\psi = y_i x_i$ и составим B:

$$B = \frac{1}{2} u^2 - y_i (a_{ij} x_j + b_i u) - \dot{y}_i x_i . \tag{I.4}$$

Из условия $\inf\limits_x B > -\infty$ находим

$$B_{x_i} \equiv -\dot{y}_i - a_{ik} y_k = 0 \qquad i,k = 1,2,\dots,n . \tag{I.5}$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ - простые корни характеристического уравнения $\Delta(\mu) = 0$ системы (I.5). Общее решение будет

$$y_i = C_s \Delta_i(\mu_s) e^{\mu_s t} \qquad s, i = 1,2,\dots,n , \tag{I.6}$$

I) Мы рассматривали метод максимина для случая конечного t_2. Увеличивая неограниченно t_2 можно перейти к случаю $t_2 = \infty$. При этом требуется дополнительное предположение, что $\int_0^\infty B dt$ - сходится.

где C_s – произвольные постоянные, Δ_i – миноры $\Delta(\mu)$, являющиеся дополнением элемента с номером i первой строки. Пусть $\mu_s<0$. Тогда из (I.6):

$$y_i(\infty)=0 \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{I.7}$$

Полагая $t=0$ из (I.6), находим $C_s=m_{sj}y_{j0}$ и

$$y_i=m_{sj}y_{j0}\Delta_{si}e^{\mu_s t} \qquad i,j,s=1,2,\dots,n, \tag{I.8}$$

где m_{sj} – известные постоянные.

Из условия $\inf\limits_{u} B$ следует

$$B_u=u-y_i\beta_i=0, \qquad u=\beta_i y_i. \tag{I.9}$$

Подставим полученное выражение и (I.5) в (I.4), найдем

$$B^{(1)}=-\frac{1}{2}(y_i\beta_i)^2. \tag{I.10}$$

Интегрируем $B^{(1)}$ и учитываем (I.6), (I.7). Тогда

$$\int_0^\infty B^{(1)}dt=-\frac{1}{2}\int_0^\infty(\beta_i m_{sj}y_{j0}\Delta_{si}e^{\mu_s t})^2dt=A_{ij}y_{i0}y_{j0}. \tag{I.11}$$

Здесь A_{ij} – известные постоянные. Пусть квадратичная форма (I.11) положительно определенная. Из условия

$$\sup_{y(t)}\left(A+\int_0^\infty B^{(1)}dt\right)=\sup_{y_0}\left[-x_{i0}y_{i0}+A_{ij}y_{i0}y_{j0}\right] \tag{I.12}$$

находим

$$y_{i0}=e_{ik}x_{k0}, \tag{I.13}$$

где e_{ik} – известные постоянные.

Т.к. каждый текущий момент времени можно принять за начальный, то подставляя (I.13) в (I.9) получаем синтез оптимального управления

$$u=\ell_i x_i, \qquad \ell_i = \text{пост.} \tag{I.14}$$

Обратим внимание, что при решении методом максимина нам: 1) не пришлось решать краевую задачу, т.е. подбирать значения неопределенных множителей, чтобы удовлетворить (I.3). Условия (I.3) автоматически вошли в (I.12). 2) При обычном методе решения (например по принципу максимума или классическим вариационным исчислением) интегрируется система <u>порядка $2n$</u> (I.1) и (I.5) замкнутые (I.9)). При использовании метода максимина в данной задаче для получения синтеза управления интегрировались только система (I.5) <u>n – порядка</u>.

Попутно решается и вопрос устойчивости системы. Подставим (I.13) в $\psi=y_i x_i$, получим квадратичную форму $\psi=e_{ik}x_i x_k$. Если эта форма отрицательно определенная, то система устойчива асимптотически. В самом деле, подставляя (I.I3) в (I.I0) мы видим, что $\sup\limits_x B=0$, $\bar{x}=0$ – единственная точка, поэтому применимо следствие 4.I п.2 гл. 4 § 4 с учетом замечания 2 гл.4 §4 . Более того, используя выпуклость ψ и $B^{(1)}$ по x можно показать, что система будет при указанных условиях устойчива асимптотически в целом.

Соответствующий пример был рассмотрен ранее (гл.3, § 2, прим. 2.5).

§ 2. Задача линейная относительно фазовых координат и нелинейная относительно управлений.

Пусть движение объекта описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = a_{ij}(t)x_j + \varphi_i(t,u) \qquad i=1,2,\dots,n, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad u\in V \tag{2.I}$$

с критерием качества вида

$$I=\int_{t_1}^{t_2}[a_{0j}(t)x_j + \varphi_0(t,u)]\,dt \tag{2.2}$$

Здесь управления входят нелинейно и коэффициенты a – функции t. Граничные условия заданы

$$x_i(t_1)=x_{i1}, \qquad x_i(t_2)=x_{i2}\,; \tag{2.3}$$

Применим метод максимина. Возьмем $\psi = y_i x_i$. Тогда

$$B = a_{0j}(t)x_j + \varphi_0(t,u) + y_i[a_{ij}(t)x_j + \varphi_i(t,u)] - \dot{y}_i x_i\,. \tag{2.4}$$

Из условия $\inf B > -\infty$ получаем

$$B_{x_i} \equiv -\dot{y}_i - a_{ik}(t)y_k + a_{0i}(t) = 0 \qquad k,i=1,2,\dots,n\,. \tag{2.5}$$

Из условия $\inf\limits_{u\in V} B$ находим

$$u = u(t,y)\,. \tag{2.6}$$

Запишем решение системы линейных уравнений (2.5) в виде

$$y_k = y_{i0}\, y_{ik}(t) + y_k^{(1)}(t) \qquad k,i=1,2,\dots,n, \tag{2.7}$$

где y_{i0} – начальные значения y_k, $y_{ik}(t)$ – нормированная фундаментальная система решений однородной системы, $y_k^{(1)}(t)$ – частное решение неоднородной системы. Подставим (2.5)-(2.7) в (2.4), проинтегрируем и составим выражение: $A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}dt$. Величина этого выражения будет определяться только начальными значениями $y_{i1}=y_i(t_1)$. Поэтому

$$\sup_{y(t)}\left(A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt\right)=\sup_{y_{i1}}\left[A^{(1)}(x_{i1},x_{i2},y_{i1},t_1,t_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y_{i1})dt\right] \quad (2.8)$$

Отыскиваем $\bar{y}_{i1}=\bar{y}_{i1}(x_{i1},x_{i2},t_1,t_2)$ из (2.8) и подставляем их в (2.6). Принимаем x_{i2}, t_2 как значения текущего момента. В результате получаем синтез управления вида

$$u=u(t,x,t_2,x_{i2}). \quad (2.9)$$

Этот синтез является полным, ибо дает управление для любых значений фазовых координат на правом конце. Его можно использовать при наведении по подвижным целям без прогноза будущего положения цели.

Интересно, что здесь также для получения синтеза точнее для более общей задачи - полного синтеза пришлось интегрировать только систему (2.5) порядка n, а не систему (2.5) совместно с (2.I), (2.6) порядка $2n$, как это пришлось бы делать во всех других методах. При построении же полного синтеза известными методами в случае когда невозможно найти решение в общем виде систему порядка $2n$ пришлось бы интегрировать бесконечное число (континиум) раз.

Таким образом, проинтегрировав систему вдвое более низкого порядка, чем в других методах, мы получили решение не обычной задачи синтеза - попадание в заданную точку из любого начального положения, а значительно более общую задачу ; точнее все множество обычных синтезов - попадание в любую точку из любого начального положения.

Повидимому метод максимина наиболее полно использует любые упрощения в уравнениях задачи.

Пример 2.I. Решить задачу

$$I=\int_{t_1}^{t_2}(ax+\tfrac{1}{2}u^2)dt, \quad \dot{x}=x+u, \quad x(t_1)=x_1, \quad x(t_2)=x_2. \quad (2.10)$$

Имеем

$$B=ax+\tfrac{1}{2}u^2-y(x+u)-\dot{y}x, \quad B_u=u-y=0, \quad u=y, \quad (2.11)$$

$$B_x=a-y-\dot{y}=0, \quad y=y_0e^{-t}+a. \quad (2.12)$$

$$J^{(1)} = A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)} dt = xy\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{4} y^2 dt = x_2(y_0 e^{-t_2} + a) - x_1(y_0 e^{-t_1} + a) +$$

$$+ \frac{1}{4} y_0^2 (e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) + y_0 a (e^{-t_2} - e^{-t_1}) + a^2 (t_2 - t_1).$$

$\sup\limits_{y_0} J^{(1)}$: $\quad J^{(1)\prime}_{y_0} = x_2 e^{-t_2} - x_1 e^{-t_1} + \frac{1}{2} y_0 (e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) + a(e^{-t_2} - e^{-t_1}) = 0$

$$J^{(1)\prime\prime}_{y_0 y_0} = \frac{1}{2}(e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) < 0, \quad \text{т.к. } t_1 > t_2.$$

$$y_0 = 2\,\frac{a(e^{-t_1} - e^{-t_2}) + x_1 e^{-t_1} - x_2 e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t_1}}. \tag{2.I3}$$

Подставляя (2.I3) в (2.I2), а (2.I2) в (2.II) и принимая t_1, x_1 за текущие значения, получим полный синтез

$$u = 2e^{-t}\,\frac{a(e^{-t} - e^{-t_2}) + x e^{-t} - x_2 e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t}} + a. \tag{2.I4}$$

В частности, если $a = 0$, $t_2 \to \infty$ имеем задачу § I о минимуме энергии сигнала и (2.I4) принимает вид

$$u = -2x. \tag{2.I5}$$

Мы здесь интегрировали только одно уравнение первого порядка (2.I2). При решении же этой задачи принципом максимума необходимо было бы интегрировать систему 2-х уравнений

$$\dot{p} = -p + a, \quad \dot{x} = x + p. \tag{2.I6}$$

При любом изменении в функциях $\varphi_i(t,u)$ и решении по методу максимина дополнительных интегрирований не требуется. Так, если в (2.I0) функционал имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (ax + \frac{1}{4} u^4) dt, \tag{2.I7}$$

то из $B_u = u^3 - y = 0$ имеем

$$u = \sqrt[3]{y} \tag{2.I8}$$

и подставляя (2.I3) в (2.I2), а (2.I2) в (2.I7) получим полный синтез для функционала (2.I7):

$$u = \sqrt[3]{2e^{-t}\,\frac{a(e^{-t} - e^{-t_2}) + x e^{-t} - x_2 e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t}} + a}. \tag{2.I9}$$

В то время как при решении по принципу максимума ситема (2.I6) стала бы нелинейной

$$\dot{p} = -p + a, \quad \dot{x} = x + \sqrt[3]{p} \tag{2.20}$$

и не только пришлось бы проделать работу заново, но и процесс интегрирования значительно бы усложнился и мог привести к неберущимся интегралам.

Кроме того, метод максимина в ряде случаев позволяет попутно решить вопрос и об устойчивости системы. Так пусть $q=0$, $t\to\infty$. Подставляя все это в (2.I9) и приравнивая (2.I9) к (2.I8) получим: $y=-2x$. Подставим в свою очередь это в $\psi=yx$, тогда $\psi=-2x^2$. Примем ψ за функцию Ляпунова V и найдем $\dot V=\dot\psi=-4x(x+u)=-4x(x-\sqrt[3]{2x})=4x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{2}-x^{\frac{2}{3}})$ Мы видим, что $V<0$, $\dot V>0$ в области $|x|<\sqrt{2}$, $\dot V<0$ в области $|x|>\sqrt{2}$ при $x\neq 0$ и, следовательно, наш синтез для функционала (2.I7) асимптотически устойчив при $|x_0|<\sqrt{2}$, устойчив при $|x_0|\le\sqrt{2}$ и неустойчив при $|x_0|>\sqrt{2}$.

При использовании же принципом максимума вопрос устойчивости свелся бы к подбору функции Ляпунова для нелинейной системы (2.20).

§ 3. Задачи о точном регулировании. Задачи о минимуме расхода топлива.

Покажем каким образом можно применить методы β – функционала в задачах с неаналитическими функционалами нерешаемых или с трудом поддающихся решению существующими методами.

I°. Пусть поведение системы описывается уравнениями (I.I) при краевых условиях (I.3), а функционал (I.2) имеет вид

$$I=\int_0^\infty |x_1|\,dt. \tag{3.I}$$

Эту задачу можно трактовать как задачу о точном регулировании, ибо в отличие от квадратичного функционала малым отклонениям придается такой же "вес" как и большим. К задаче не применимы обычные методы, т.к. функционал не аналитичен (не дифференцируем по линии $x_1\equiv 0$).

Заменим функционал (3.I) функционалом (I.3) § I. Получим задачу о минимуме энергии сигнала, которая решается до конца (§I). Тогда согласно гл.I лучшие решения задачи (3.I) будут внутри области (теорема 4.I § 4 гл.I).

$$\frac{1}{2}u^2+|x_1|\le\frac{1}{2}\bar u^2+|\bar x_1|, \tag{3.2}$$

где $\bar u,\bar x_1$ – минималь задачи (I.3) § I. Эта область показана на фиг.3.I. Она не пуста, т.к. при использовании синтеза (I.I4)

$x_1 = \bar{x}_1$ и как следует из (3.?) существует решения у неравенства (3.?) по u. Если можно выбрать u так, что в k каждый момент оно будет удовлетворять строгому неравенству (3.2), то значение функционала (3.?) будет заведомо лучше, чем наше решение.

Аналогично можно найти области лучших решений в задачах с неаналитическими функционалами

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} |x_1|^q dt, \quad 0<q \ , \tag{3.3}$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt[p]{|x_1|^q}\, dt \quad q>0, \ p>0 , \tag{3.4}$$

$$I_3 = \int_{t_1}^{t_2} |u|^q\, dt \quad q>0. \tag{3.5}$$

Или даже когда подинтегральное выражение $f_0(t,x,u)$ является разрывной функцией, например

$$I_4 = \int_{t_1}^{t_2} f_0(x_1) dt, \qquad f_0 = \begin{cases} 1, & x_1 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

В качестве функционала (I.3) можно брать любой функционал, для которого можно найти решение. Это же замечание относится и к связям (I.I), которые не обязательно должны быть линейны. Естественно, что вид области "лучших" решений будет зависеть от выбранного функционала.

Заметим, что задача (3.3) при достаточно больших q является приближенной аппроксимацией задачи о минимуме максимального отклонения координаты $x_1(t)$ на $[t_1, t_2]$, а задача (3.5) при q =I трактуется обычно на задаче о минимуме расхода топлива независимо от вида связей (I.I).

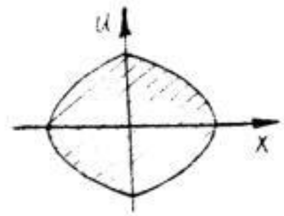
Основные результаты

I. Методом максимина решена задача минимизации энергии сигнала. Показано, что использование этого метода в данной задаче позволяет вдвое понизить порядок интегрируемой системы по сравнению с другими известными методами.Попутно просто решается вопрос устойчивости.

2. Методом максимина решена задача линейная относительно фазовых координат и нелинейная относительно управлений. Показано, что при применении этого метода для получения полного синтеза необходимо проинтегрировать линейную систему порядка n , в то время как для решения

этой задачи другими известными методами пришлось бы интегрировать систему порядка $2n$ бесконечное число раз.

3. Показано как можно получить множество лучших решений в задачах с неаналитическими (не дифференцируемыми и разрывными) функционалами. В частности, в задаче о точном регулировании, в задаче о минимуме расхода топлива, в приближенной задаче о минимуме максимального отклонения некоторой координаты.



Фиг. 3.1.

II. Особые решения в задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов.[1)]

В ч. II данной главы решается задача проектирования оптимального регулятора, когда в функционал не входят управления. В этом случае вариационная задача вырождается и минимум достигается на особых экстремалях. Для исследования применены методы главы 6. Показано, что подобные задачи могут быть сведены к обычным вариационным задачам более низкого порядка и решение их упрощается.

§ I. Введение. Постановка задачи.

I°. В [51] ч. I-II А.М. Летовым была поставлена следующая задача. Пусть возмущенное движение объекта описывается уравнениями

$$\dot{\eta}_k = \sum_\alpha b_{k\alpha}\eta_\alpha + m_k\xi \qquad k,\alpha = 1,2,\dots,n, \qquad /I.1/$$

где $b_{k\alpha}, m_k$ – постоянные, ξ – ограниченное управление.

Граничные условия:

$$0 \le t \le \infty, \quad \eta_1(0)=\eta_{10},\dots, \quad \eta_n(0)=\eta_{n0}, \quad \eta_1(\infty)=\dots=\eta_n(\infty)=0. \qquad /I.2/$$

Ставится задача: найти в аналитической форме закон регулирования, который образует устойчивую систему и гарантирует минимум функционала

$$I=\int_0^\infty V dt, \quad V=\sum_k a_k\eta_k^2 + c\xi^2, \quad a_k, c - \text{пост.} > 0. \qquad /I.3/$$

Как видим в функционал наряду с отклонением системы от заданного режима $\sum_k a_k\eta_k^2$, введено и отклонение органа управления $c\xi^2$. Это

---

1) Результаты этой работы докладывались на семинаре в Московском авиационном институте / ноябрь, 1964г. / и семинаре А.М. Летова / Институт автоматики и телемеханики, 1964г./.

7

вызвано не физической сущностью задачи, а тем, что в противном случае возможны особые экстремали, методы отыскания которых недостаточно разработаны. В /51/ ч. Ш стр. 665 А.М. Летов ставит задачу аналитического конструирования регулятора, когда в функционале отсутствует управление. Этой задаче и посвящена настоящая глава [redacted].

Некоторые случаи этой задачи с одним управлением рассматривались в /52/, /77/, /78/.

В отличие от указанных работ в данной работе рассматривается задача с любым числом особых управлений, рассматриваются многократные особые экстремали, особые экстремали с так называемой сложной особенностью. В статье выведен закон оптимального управления, получены условия входа и схода с особой экстремали, приводятся новые необходимые условия оптимальности многократного режима с простой и сложной особенностью, исследуются некоторые вопросы устойчивости особых решений. Излагаемое в § 3,4 решение многократных особых режимов методом преобразований позволяет просто в ряде случаев учитывать ограничения на фазовые координаты.

Заметим, что изложенные результаты нельзя получить с помощью методов /75/, /76/, т.к. эти методы развиты только для однократных особых режимов. Эта глава основывается на теории гл. 5.

2° Сформулируем теперь постановку задачи. Пусть движение объекта регулирования описывается системой дифференциальных уравнений [1])

$$\dot\eta_k = \sum_\alpha b_{k\alpha}\eta_\alpha + \sum_\beta m_{k\beta}\xi_\beta \qquad k,\alpha = 1,2,\dots,n;\ \beta = 1,2,\dots\, r \le n \qquad (1.1')$$

с граничными условиями (1.2). Здесь $\xi(t) = \{\xi_1(t),\dots,\xi_r(t)\}$ - r - мерная вектор функция управления кусочно-непрерывная и принимающая значения из ограниченной замкнутой области $|\xi_\beta| \le \xi_\beta^*$, $\xi_\beta^* > 0$. $\eta(t) = \{\eta_1(t),\dots\eta_n(t)\}$ - n - мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция.

Требуется в аналитической форме найти закон регулирования, который образует устойчивую систему и минимизирует функционал

$$I = \int_0^\infty \sum_k a_k \eta_k^2\, dt. \qquad (1.3')$$

------

1) Предполагается, что система (1,1') управляема.

Предполагается, что $b_{k\alpha}, m_{k\beta}, a_k$ – постоянные, не все $m_{k\beta}, a_k = 0$ и $a_k \geqslant 0$.

§ 2. "Прямой" метод решения

(многократный особый режим, простая особенность)

1°. В этом методе исследуется непосредственно система (1.1'). Запишем функцию **B** /см. гл. 2 выр. (1.7)/ для этой системы: $B = -\psi_x - H$. Здесь

$$H = \sum_k p_k \left(\sum b_{k\alpha}\eta_\alpha + \sum m_{k\beta}\xi_\beta\right) - \sum_k a_k \eta_k^2, \qquad (2.1)$$

ψ – характеристическая функция, взятая в виде $\psi = P_k \Delta x_k$, $\Delta x_k = x_k - \bar{x}_k$.

Из необходимого условия $B_{p_k} = 0$ гл. 2, выр. (2.14), получаем

$$\dot{p}_k = 2a_k\eta_k - \sum_\alpha p_\alpha b_{\alpha k} \quad (k = 1, \dots, n). \qquad (2.2)$$

Необходимое условие оптимальности управления гл. 2 выр. (1.12):

$$\bar{B} = \inf_\xi B \quad \text{или} \quad \bar{H} = \sup_\xi H, \quad \text{ибо} \quad \inf_\xi B = -\sup_\xi H + \psi_t. \qquad (2.3)$$

Здесь $p_k(t) = \bar{\psi}_{\eta_k}$ – частные производные характеристической функции $\psi(t,\eta)$ по η_k на экстремали. Если $\sum_{i=1}^n p_i m_{i\beta} \neq 0$, то из (2.3) следует, что $\xi_\beta = \xi_\beta^* \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n p_i m_{i\beta}$.

Мы в дальнейшем будем рассматривать случай, когда некоторые компоненты оптимального управления лежат внутри допустимой области. Без ограничения общности для определенности такими компонентами будет считать m первых компонент ξ_β $(\beta = 1, \dots, m \leq r)$[1].

Из условия (2.3) следует

$$\partial H / \partial \xi_\beta = \sum_k p_k m_{k\beta} = 0 \quad \beta = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n \qquad (2.4)$$

Дифференцируем эти равенства по t и исключаем $\dot{p}_k$ при помощи (2.2)

$$d/dt\left(\partial H/\partial \xi_\beta\right) = \sum_k m_{k\beta}\left(2a_k\eta_k - \sum_\alpha p_\alpha b_{\alpha k}\right) = 0 \quad \beta = 1, \dots, m. \qquad (2.5)$$

Согласно гл. 5 дифференцируем (2.5) еще раз по t

$$d^2/dt^2\left(\partial H/\partial \xi_\beta\right) = \sum_k m_{k\beta}\Big[2a_k\Big(\sum_\alpha b_{k\alpha}\eta_\alpha + \sum_\gamma m_{k\gamma}\xi_\gamma + \sum_\omega f_\omega\Big) -$$

$$- \sum_\alpha b_{k\alpha}\Big(2a_\alpha\eta_\alpha - \sum_i p_i b_{i\alpha}\Big)\Big] = 0, \quad f_\omega = \pm m_{k\omega}\xi_\omega^*, \quad \beta, \gamma = 1, \dots, m;\ k, \alpha = 1, \dots, n; \quad \omega = r - m + 1, \dots, \chi. \qquad (2.6)$$

---

1) Если это не так, то изменением порядка нумерации ξ_β этого всегда можно добиться.

Из этой системы можно определить ξ_β , если матрица

$$F = \| W_{\beta\gamma} \| \quad , \text{ где } \quad W_{\beta\gamma} = 2\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa m_{\kappa\beta} m_{\kappa\gamma} \quad \beta,\gamma = 1,\dots,m$$

имеет ранг m .

Напоминаем, что особая экстремаль, у которой матрица $\left\| \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}\right)\right]\right\|$ $\beta,\gamma=1,\dots,m$, имеет ранг m , называется экстремалью с простой особенностью.

В этом параграфе будут изучаться только особые экстремали с простой особенностью, т.е. когда $|W_{\beta\gamma}| \neq 0$.

Необходимое условие оптимальности особой экстремали согласно главе 5 § 2 будет выполнено, если угловые миноры, исходящие из верхнего левого угла определителя $|W_{\beta\gamma}| \neq 0$ больше нуля. В частности,

$$\sum_\kappa a_\kappa m_{\kappa\beta}^2 \geq 0 \qquad \beta = 1,\dots,m.$$

Разрешим систему (2.6) относительно ξ_β

$$\xi_\beta = \sum_\alpha e_{\beta\alpha}\eta_\alpha - \sum_i c_{\beta i} p_i + K_\beta , \quad e, c, K \text{ - пост.} \qquad (2.7)$$

Подставим ξ_β в (1.1')

$$\dot\eta_\kappa = \sum_\alpha g_{\kappa\alpha}\eta_\alpha - \sum_i \Big(\sum_\beta m_{\kappa\beta} c_{\beta i}\Big) p_i + \varphi_\kappa , \quad \text{где} \quad g_{\kappa\alpha} = b_{\kappa\alpha} + \sum_\beta m_{\kappa\beta} e_{\beta\alpha}, \quad \varphi \text{ - пост.} \quad (2.8)$$

Пусть функциональный определитель Φ системы (2.4), (2.5) относительно переменных p_τ, η_τ $\tau = n-m+1,\dots,n$ имеет ранг $2m$. Исключим эти переменные из первых $n-m=\nu$ уравнений в (2.2) и в (2.8) при помощи системы (2.4), (2.5). Введем новые переменные $\bar\eta_\kappa = \eta_\kappa + \varphi_\kappa$

Получим систему $2(n-m) = 2\nu$ уравнений

$$\dot{\bar\eta}_\kappa = \sum_\alpha \sigma_{\kappa\alpha}\bar\eta_\kappa + \sum_\alpha \pi_\alpha p_\alpha , \quad \dot p_\kappa = \sum_\alpha \rho_{\kappa\alpha}\bar\eta_\alpha + \sum_\alpha \tau_{\kappa\alpha} p_\alpha \quad \kappa,\alpha = 1,\dots,\nu, \ \sigma_{\kappa\alpha}, \pi_\alpha, \rho_{\kappa\alpha}, \tau_{\kappa\alpha} \text{ - пост.} \quad (2.9)$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\nu$ - простые корни характеристического уравнения $\Delta(\mu) = 0$ системы (2.9). Общее решение будет

$$\dot{\bar\eta}_\kappa = \sum_{s=1}^{2\nu} C_s \Delta_\kappa(\mu_s) e^{\mu_s t}, \quad p_\kappa = \sum_{s=1}^{2\nu} C_s \Delta_{n+\kappa}(\mu_s) e^{\mu_s t} \qquad \kappa = 1,\dots,\nu, \qquad (2.10)$$

где Δ_κ - миноры $\Delta(\mu)$, служащие дополнением элемента с номером κ первой строки, C_s - постоянные интегрирования.

Легко видеть, что удовлетворить граничным условиям (1.2) при произвольных η_{κ_0} можно только в том случае, если ν корней μ_i ($i = 1,\dots,\nu$)

имеют отрицательные вещественные части. Пусть это имеет место. Тогда при $t\to\infty$ выражения в (2.10) будут стремиться к выражениям

$$0=\sum_{s=\nu+1}^{2\nu}\Delta_k(\mu_s)C_s e^{\mu_s\infty} \qquad k=1,\dots,\nu.$$

Эти равенства могут иметь место только при $C_s=0$, т.к. частные решения $\Delta_k(\mu_s)e^{\mu_s t}$ линейно независимы (в силу фундаментальности системы решений). В результате выражения (2.10) примут вид

$$\eta_k=\sum_{s=1}^{\nu}C_s\Delta_k(\mu_s)e^{\mu_s t}+\bar{C}_k,\quad p_k=\sum_{s=1}^{\nu}C_s\Delta_{n+k}(\mu_s)e^{\mu_s t}\quad k=1,\dots,\nu,\ \ \bar{C}_k\text{-пост.}\ (2.11)$$

Согласно нашему предположению они содержат только μ_s с отрицательной действительной частью. Если $m=\tau$, то повторяя вывод получим, что $C_k=0$ и по компонентам $\eta_1,\dots,\eta_\nu$ регулятор при изменении $\xi_1,\dots,\xi_m$ в открытой области будет устойчив. Покажем, что он будет устойчив и по компонентам $\eta_{\nu+1},\dots,\eta_n$, если определители $\Phi_1=|m_{k\beta}|\neq 0$, $\Phi_2=|a_k m_{k\beta}|\neq 0$ $k,\beta=\nu+1,\dots,n$. В самом деле при $t\to\infty$ согласно (2.11) $p_k\to 0$, $\eta_k\to 0$ $k=1,\dots,\nu$. Из (2.4) получаем, что $p_k=0$ $(k=\nu+1,\dots,n)$, т.к. $|m_{k\beta}|\neq 0$, а из (2.5), что $\eta_k=0$ $(k=\nu+1,\dots,n)$ т.к. $|a_k m_{k\beta}|\neq 0$.

Исключим $C_s e^{\mu_s t}$ из 2-го выражения в (2.11) при помощи 1-го выражения в (2.11). Получим зависимость

$$p_i=\sum_{\alpha=1}^{\nu}h_{i\alpha}\eta_\alpha+n_i \qquad ,\text{ где }\ h_{i\alpha},\ n_i=\text{пост.} \qquad (2.12)$$

Исключим из (2.7) η_i, p_i $(i=n-\nu+1,\dots,n)$ при помощи (2.4), (2.5) и подставим (2.12) в (2.7). Найдем закон оптимального управления в открытой области

$$\xi_\beta=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\ell_{\alpha\beta}\eta_\alpha+C_\beta \quad \beta=1,\dots,m,\ \text{где}\ \ \ell_\alpha,\ C_\beta-\text{пост.} \qquad (2.13)$$

Таким образом, в открытой области на особой экстремали закон регулирования получился почти тот же, что и у А.М. Летова /51/, но входят постоянные C_β и ξ_β зависит от меньшего числа переменных, т.к. наша система дифференциальных уравнений (1.1') (2.2) дополнилась 2ν конечными соотношениями (2.4), (2.5), из которых на участке особого управления 2ν величин η_i, p_i могут быть найдены без всяких интеграций $(\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \neq 0)$. Произошло вырождение вариационной задачи на $2m$ единиц.

Следовательно, чем больше особых управлений, тем проще решение. В частности, при $m = \frac{1}{2}n$ выражения $\xi_\beta = \sum_\alpha \ell_{\alpha\beta}\eta_\alpha + C_\beta$ могут быть найдены без всяких интеграций. Если $m = n$, то вообще, говоря, можно сразу найти особое решение: $\eta(t) = p(t) = \xi(t) \equiv 0$.

Из приведенных рассуждений следует, что в задаче с простой особенностью порядок особенности равен m, и, если $\Phi \neq 0$, то порядок вырождения равен $2m$.

Условие перехода с экстремали с порядком особенности m $(m \geqslant 0)$ на экстремаль с порядком особенности $m+1 \leq \tau$, состоит в выполнении в момент входа еще одного равенства (2.4) для особого управления $(m+1) - r0$. Для перехода на экстремаль с меньшим порядком особенности достаточно, чтобы соответствующее $\sum_\kappa a_\kappa m_{\kappa\gamma}^2 > 0$.

В случае, когда $m=1$ необходимое условие ((1.1), гл. 5 прил. 1 к § 3) оптимальности особой экстремали

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)\right] = \sum_\kappa a_\kappa m_\kappa^2 \geqslant 0 \qquad (2.14)$$

выполнено, если $a_\kappa \geqslant 0$.

2^0. Как мы только что показали в устойчивом ($\mu_s < 0$) регуляторе при $t \to \infty$ переменные $\eta_\kappa, p_\kappa \to 0$. Следовательно, если особая экстремаль проходит через начало координат фазового пространства η, то согласно (2.12) постоянные $\eta_i = 0$. Исключим при помощи (2.5) переменные p_κ $(\kappa = n-\nu, \ldots, n)$ из (2.4), а при помощи (2.12) переменные p_κ $(\kappa = 1, \ldots, \nu)$ $(\eta_i = 0)$. Получим некоторые линейные формы $\sum_i q_{\beta i}\eta_i$ $(\beta = 1, \ldots, m)$, $q_{\beta i} = \text{пост}$, представляющие собой гиперплоскости в пространстве η. Нетрудно видеть, что в силу необходимого условия оптимальности: $\bar{H} = \sup_\xi H$ и (2.4) – эти гиперплоскости являются гиперплоскостями переключения соответствующих управлений ξ_β. Особые экстремали лежат в этих гиперплоскостях. Причем, если особая экстремаль лежит сразу в 2-х гиперплоскостях, то она имеет особенность 2-го порядка, если в 3-х, то 3-го порядка и т.д. Если особая экстремаль проходит через начало координат, то и соответствующая гиперплоскость проходит через начало координат. Тот факт, что в данной задаче существуют особые экстремали, проходящие через начало координат, доказан в § 3 (см. теор. 7.1). Необходимому условию оптимальности: $\bar{H} = \sup_{\xi} H$ в данной задаче удовлетворяют только два вида экстремалей: $\partial H/\partial \xi_\beta = 0$, $\partial H/\partial \xi_\beta \neq 0$. В том случае, когда они расположены в некоторой окрестности начала координат мы нашли для первой (обычной: $\sum_i q_{\beta i}\eta_i \neq 0$) закон управления $\xi_\beta = \xi_\beta^* \operatorname{sign} \sum_i q_{\beta i}\eta_i$, а для 2-й (особой: $\sum_i q_{\beta i}\eta_i \equiv 0$) – закон управления (2.13). Таким образом в некоторой окрестности начала координат можно построить полный синтез оптимального управления.

3°. Заметим, что в области устойчивости около начала координат для рассматриваемой задачи имеет место первый интеграл $H=0$, где H есть (2.1). В самом деле т.к. система (1.1) и (1.3') не зависит явно от t, то $\frac{dH}{dt}=0$, т.е. $H=C$. Но в устойчивом регуляторе при $t\to\infty$ переменные $p_\kappa \to 0$, т.е. $C=0$. Обратим внимание также, что законом управления $\xi = \xi_\beta^* \operatorname{sign} \sum_i q_{\beta i}\eta_i$ можно пользоваться и на особой экстремали, если идти по ней в скользящем режиме, используя только граничные значения: ξ^* и $-\xi^*$. Этот закон имеет место в некоторой области около особой экстремали, пока $|\xi_\beta| \le \xi_\beta^*$, т.е. длина этой области вдоль особой экстремали по крайне мере не менее, чем $\pm \xi_\beta^* / (\sum_i q_{\beta i}\eta_i)$.

Пример 2.1. Пусть (1.1), (1.3') и дополнительные условия имеют вид:

$$I=\int_0^\infty a\eta_2^2\,dt,\quad \dot{\eta}_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2,\quad \dot{\eta}_2 = b_{22}\eta_2 + m_2\xi, \tag{2.15}$$

$$|\xi|\le 1,\quad \eta_1(0)=\eta_{10},\quad \eta_2(0)=\eta_{20},\quad \eta_1(\infty)=\eta_2(\infty)=0,\quad a>0,\ b_{11}<0,\ m_2\neq 0. \tag{2.16}$$

Запишем функцию H и сопряженную систему

$$H = p_1(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2) + p_2(b_{22}\eta_2 + m_2\xi) - a\eta_2^2, \qquad (2.17)$$

$$\dot p_1 = -H_{\eta_1} = -b_{11}p_1, \quad \dot p_2 = -H_{\eta_2} = 2a\eta_2 - p_1 b_{12} - p_2 b_{22}. \qquad (2.18)$$

Из условия $\max\limits_{\xi} H$ и вида функции H следует, что возможны, как обычная экстремаль, когда $\xi = sign\,(m_2 p_2)$, так и особые, когда $\partial H/\partial\xi \equiv 0$. Исследуем особые экстремали по изложенной теории:

$$\partial H/\partial\xi = m_2 p_2 = 0, \text{ т.е. } p_2 \equiv 0, \; d/dt(\partial H/\partial\xi) = m_2(2a\eta_2 - p_1 b_{12}) = 0, \quad (2.19)$$

$$d^2/dt^2(\partial H/\partial\xi) = m_2[2a(b_{22}\eta_2 + m_2\xi) + b_{11}b_{12}p_1] = 0. \qquad (2.20)$$

Из последнего выражения, в частности, видно, что особые экстремали имеют простую особенность, ибо $\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\right] \neq 0$. Исключим из 1-го интеграла системы (2.15), (2.18), а именно: $H = p_1(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2) - a\eta_2^2 = 0$ переменную p_1 при помощи 2-го уравнения (2.19), получим $\eta_2(b_{12}\eta_2 + 2b_{11}\eta_1) = 0$. Отсюда следует, что в данной задаче возможны 3-й особых экстремали:

$$1)\ \eta_2 \equiv 0, \quad 2)\ \eta_2 = -2\frac{b_{11}}{b_{12}}\eta_1, \quad 3)\ \eta_1 \equiv 0, \; \eta_2 \equiv 0. \qquad (2.21)$$

Все 3-и особые экстремали на фазовой плоскости $\eta_1\eta_2$ проходят через начало координат. Причем последняя из них вырождается в точку.

Подставляя эти значения в (2.15) находим, что особое управление принимает соответственно значения

$$1)\ \xi \equiv 0, \quad 2)\ \xi = \frac{2b_{11}(b_{11} + b_{22})}{m_2 b_{12}}\eta_1 \text{ или } \xi = -\frac{b_{11} + b_{22}}{m_2}\eta_2, \quad 3)\ \xi \equiv 0. \qquad (2.22)$$

Необходимое условие оптимальности $\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\right] = 2am_2^2 \geq 0$ выполнено, если $a > 0$.

Исследуем 2-ю экстремаль. Если подставить $\xi = f(\eta_2)$ из (2.22) в 3-е уравнение (2.15), $\eta_2 = f(\eta_1)$ из (2.21) п. 2 во 2-е уравнение (2.15), то получим на 2-й особой экстремали $\dot\eta_1 = -b_{11}\eta_1$, $\dot\eta_2 = -b_{11}\eta_2$. Т.к. $b_{11} < 0$ по условию, то отсюда следует, что с ростом t переменные $\eta_1\eta_2$ на 2-й особой экстремали растут, т.е. изображающая точка фазового пространства удаляется от заданных граничных условий

(2.16), а потому 2-я особая экстремаль должна быть отброшена. Осталось 2-е особых экстремали. Сигналом входа на 1-ю из них является момент наступления равенства $H_\xi=0$, т.е. $p_2=0$ (2.19), условие входа в выполнении в момент входа равенства $d/dt\,[\partial H/\partial\xi]=0$, т.е. $2a\eta_2-p_1 b_{11}=0$ (2.19). Условие схода выполнено, если $a>0$ /2/. Сигналом перехода с 1-ой на 3-ю служит момент наступления равенства $\eta_1=0$. Переход не связан ни с какими условиями, ибо обе экстремали с простой особенностью, обе 1-го порядка и пересекаются. Оптимальное решение состоит в таком выборе ξ, чтобы как можно быстрее достигнуть особой экстремали, т.е., как следует из (2.21) п.1 и 3-го уравнения в (2.15), $\xi=sign(-m_2\eta_2)$ (обычная экстремаль). Затем в движении по 1-ой особой экстремали $\eta_2\equiv0$, $\xi\equiv0$ и затем в движении по 2-ей особой экстремали $\eta_1=0$, $\eta_2=0$, $\xi=0$. Фазовый портрет оптимальных траекторий для двух случаев $b_{22}\le0$ и $b_{22}>0$ изображен на фиг. 8.1а и 8.1б соответственно.

По особой экстремали можно идти и в скользящем режиме, используя синтез: $\xi=-sign\,\eta_2$.

§ 3. Решение методом преобразований (многократный особый режим, простая особенность)

1°. Слагаемое $m_{k\beta}\xi_\beta$ в правой части уравнений (1.1') можно рассматривать как проекцию в n-мерном пространстве η на данную ось η_k компоненты управляющего вектора. Идея метода состоит в таком преобразовании системы координат, чтобы этот вектор был параллелен $n-1$ новым осям и проектировался бы только на одну ось. С математической точки зрения это преобразование означает просто переход к новым переменным, $n-1$ уравнений для которых не содержали бы в правой части компоненты управления ξ_β. Поскольку у нас z (предполагается $z\le n$) управлений, то необходимо найти такую систему координат, чтобы каждое управление "проектировалось" бы только на "свою" ось и только на "свою" ось.

Один из конкретных методов получения таких преобразований заключается в следующем. Пусть $z_i = z_i(t,\eta)$ некоторый набор $n-\tau$ независимых дифференцируемых функций, связывающих z, t, η . Продифференцируем z по t и подставим (1.1'):

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_\kappa \frac{\partial z_i}{\partial \eta_\kappa}\Big(\sum_\kappa b_{\kappa\alpha}\eta_\alpha\Big) + \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_\beta\Big(\sum_\kappa \frac{\partial z_i}{\partial \eta_\kappa} m_{\kappa\beta}\Big)\xi_\beta \quad i=1,\dots,\nu. \qquad (3.1)$$

Отсюда видно, чтобы z_i $(i=1,\dots,n-\tau=\nu)$ давали преобразование, в котором $n-\tau$ уравнений не содержат в правой части управления, необходимо и достаточно, чтобы они были независимыми первыми интегралами системы уравнений в частных производных

$$\sum_\kappa \frac{\partial z}{\partial \eta_\kappa} m_{\kappa\beta} = 0 \qquad \beta = 1,\dots,\tau. \qquad (3.2)$$

Рассуждая аналогично в отношении оставшихся τ функций $z_{\nu+j} = z_{\nu+j}(t,\eta)$ $(j=1,\dots,\tau)$ получим результат: чтобы $z_{\nu+j} = z_{\nu+j}(t,\eta)$ давало преобразование такое, что правая часть уравнения с номером $\nu+j$ (ν-пост.) содержит только одно управление необходимо и достаточно, чтобы эта функция была первым интегралом системы уравнений

$$\sum_\kappa \frac{\partial z_{\nu+\beta}}{\partial \eta_\kappa} m_{\kappa\beta} = 0 \quad \beta = 1,\dots,j-1,j+1,\dots,\tau;\quad j=1,\dots,\tau. \qquad (3.3)$$

Таким образом, для отыскания нужных преобразований достаточно найти τ первых интегралов системы (3.2) и по одному первому интегралу каждой из систем (3.3)[1]. Если некоторые из уравнений (3.3) не содержат управлений или содержат только одно управление, они не нуждаются в преобразовании и задача упрощается.

В результате преобразования системы (1.1') перейдет в систему

$$\dot z_i = \sum_\alpha q_{i\alpha} z_\alpha \quad (i=1,\dots,n-\tau), \qquad \dot z_{\nu+j} = \sum_\alpha q_{\nu+j,\alpha} z_\alpha + K_j \xi_j \quad (j=1,\dots,\tau),$$

$$I = \int_0^\infty \sum_{\kappa,\alpha} a_{\kappa\alpha} z_\kappa z_\alpha\, dt \quad (\alpha,\kappa = 1,\dots,n;\ \nu = n-\tau). \qquad (3.4)$$

----

1) В рассматриваемой задаче эти интегралы не будут зависеть от t .

Для этой системы составим функцию $B = -\psi_x - H$, где

$$H = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \sum_{\alpha} g_{i\alpha} z_\alpha + \sum_{j=1}^{\tau} \left(\sum_{\alpha} g_{\nu+j,\alpha} z_\alpha + K_j \xi_j \right) = \sum_{\alpha,\kappa} a_{\alpha\kappa} z_\kappa z_\alpha , \qquad (*)$$

и применим изложенную в гл. 5 § 3 процедуру для отыскания минимума. Из условия $\inf_{\xi} B$ следует, что если $p_{\nu+j} \neq 0$, то $\xi_j = \xi_j^* \operatorname{sign} p_{\nu+j}$. Если же оптимальные значения ξ_j ($j = 1, \ldots, m \leq \tau$) лежат внутри допустимой области, то $\partial B / \partial \xi_j = -\partial H / \partial \xi_j = K_j p_{\nu+j} = 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Т.к. $K_j \neq 0$ по условию, из последнего равенства получаем $p_{\nu+j}(t) \equiv 0$. Это равносильно тому, что уравнения с номером $\nu+j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) на участке особого управления отсутствуют (не участвуют в решении), а в оставшейся системе $z_{\nu+j}$ становится "управлением". Если определитель $F^* = \left| \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j} \partial z_{\nu+\gamma}} \right| \neq 0$ $j, \gamma = 1, \ldots, m$, то новое "управление" не является особым и может быть найдено из условия $\sup_{z_{\nu+j}} H$, т.е. уравнений $\partial H / \partial z_{\nu+j} = 0$ $j = 1, 2, \ldots, m$[1]. Соответствующее особое управление ξ_j находим из уравнений $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{\nu+j}} \right) = 0$. Если $|\xi_j| < |\xi_j^*|$, то особая экстремаль возможна. Необходимое условие оптимальности особой экстремали с порядком особенности m состоит в том, что квадратичная форма $-\sum_{j,\gamma=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j} \partial z_{\nu+\gamma}} \right) \delta z_{\nu+j} \delta z_{\nu+\gamma}$ должна быть положительна.

Условие входа на особую экстремаль с порядком особенности равным 1, заключается в подборе таких начальных p, чтобы в момент входа соответствующее $p_{\nu+j} \equiv 0$. Условие перехода с экстремали с порядком особенности m на экстремаль с порядком особенности $m+1 \leq \tau$, когда подключается новое особое управление ξ_ω, состоит в таком подборе начальных $p(0)$, чтобы в момент перехода на экстремаль с более высоким порядком особенности $p_{\nu+\omega} = 0$. Отсюда, в частности, следует, что особые экстремали с порядком особенности большим

----

1) Этот случай соответствует в "полной" задаче особой экстремали с простой особенностью.

n -невозможны. Для перехода на экстремаль с меньшим (на единицу) порядком особенности (управление ξ_ω перестает быть особым) - достаточно, чтобы $\partial^2 H/\partial z^2_{\nu+\omega} > 0$. Подбирая моменты перехода на экстремали низших порядков можно удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце, если решение краевой задачи существует[1].

Составим уравнения $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial z_\alpha$ $\alpha = 1,2,\dots,n$. Исключим из них и уравнений (3.4) новые "управления" $w=\{z_{\nu+1},\dots,z_r\}$ при помощи условия $\inf\limits_w B = -\sup\limits_w H + \psi_t$. Проинтегрировав полученные уравнения на особой экстремали по методике § 2, получим

$$z_{\nu+j} = \sum_{k=1}^{\nu} \tau_{kj} z_k + \gamma_j \quad j=1,\dots,m, \text{ где } \qquad \gamma_j, \tau_{kj}\text{-пост.} \qquad (3.5)$$

Возвращаясь к старым переменным, т.е. подставляя в (3.5) $z_i = z_i(\eta)$, найдем m зависимостей $\Phi_i(\eta)=0$ $i=1,\dots,m$, определяющих в n-мерном фазовом пространстве η поверхность, на которой лежит особая экстремаль. Если зависимость $\Phi_i(\eta)=0$ продифференцировать полным образом по t: $d\Phi_i/dt=0$, исключить $\dot{\eta}$ при помощи (1.1'), а затем при помощи $\Phi_i(\eta)=0$ $i=1,\dots,m$ исключить из них m последних компонент[2] η, то получим, что $\xi_\beta = \sum_{k=1}^{\nu} b_{k\beta}\eta_k + c_\beta$ $\beta=1,\dots,m$, $c_\beta, b_{k\beta}$=пост.-закон управления на особой экстремали идентичный закону, полученному в § 2, выр. (2.13).

2°. Рассмотрим подробнее важный для практики случай, когда $\beta=1$ (одно управление). Тогда (3.2) есть

$$\sum_k \frac{\partial z}{\partial \eta_k} m_k = 0. \qquad (3.6)$$

Пусть $m_n \neq 0$. Без ограничения общности в качестве оси, которой должен стать параллельным вектор управления, возьмем ось η_n. Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (3.6) удовлетворяется следующей системой независимых функций:

---

1) Имеется в виду случай, когда граничные условия на правом конце $\eta(t_2) \neq 0$.

2) Это возможно, ибо соотношения $\Phi_i(\eta)=0$ $i=1,2,\dots,r$ независимы между собой, в силу независимости $z_k = z_k(t,\eta)$ $k=1,\dots,n-1$ (3.5) и фундаментальности системы решений.

$$z_\kappa = \eta_\kappa - \frac{m_\kappa}{m_n}\eta_n \qquad \kappa = 1,\dots,n-1, \tag{3.7}$$

которые образуют систему $n-1$ независимых первых интегралов (3.6).

Введем вместо $\eta_1,\dots,\eta_{n-1}$ новые переменные z_κ по (3.7). Делая замену переменных в (1.1'), (1.3'), получим

$$I = \int_0^\infty V dt = \int_0^\infty \left\{ \sum_{\kappa=1}^{n-1} a_\kappa \left[z_\kappa^2 + 2\frac{m_\kappa}{m_n} z_\kappa \eta_n + \left(\frac{m_\kappa}{m_n}\right)^2 \eta_n^2 \right] + a_n \eta_n^2 \right\} dt, \tag{3.8}$$

$$\dot z_\kappa = \sum_\alpha e_{\kappa\alpha} z_\alpha + \frac{1}{m_n}\left(\sum_\alpha m_\alpha e_{\kappa\alpha}\right)\eta_n \qquad \kappa = 1,\dots,n-1=\nu, \tag{3.9}$$

$$\dot\eta_n = \sum_\alpha b_{n\alpha} z_\alpha + \frac{1}{m_n}\left(\sum_\alpha b_{n\alpha} m_\alpha\right)\eta_n + m_n\xi, \quad \text{где} \quad e_{\kappa\alpha} = b_{\kappa\alpha} - \frac{m_\kappa}{m_n} b_{n\alpha}. \tag{3.10}$$

Граничные условия

$$0 \le t \le \infty, \quad z_\kappa(0) = z_{\kappa 0}, \quad z_\kappa(\infty) = 0, \quad \eta_n(0) = \eta_{n0}, \quad \eta_n(\infty) = 0. \tag{3.11}$$

Полученная система отличается от исходной тем, что в ней управление ξ входит только в одно уравнение (3.10). Поставим вариационную задачу для системы (3.8) - (3.10). Нетрудно видеть, что, если ξ меняется в открытой области, то согласно условию $\sup\limits_\xi H$, получим, что $p_n = 0$ (ибо $m_n \ne 0$). Это равносильно тому, что уравнение (3.10) на участке особого режима отсутствует, а в оставшейся системе (3.8) - (3.9) η_n становится управлением. Если $\partial^2 H/\partial\eta_n^2 \ne 0$, то система (3.8) - (3.9) не вырожденная и может быть решена обычными методами.

Составим функцию H (см.(*)) для системы (3.8) - (3,9). Необходимое условие стационарности H по η_n, т.е. $\partial H/\partial\eta_n = 0$ при $\sum\limits_i a_i^2 m_i^2 \ne 0$, дает

$$\eta_n = -\left[\frac{m_n \sum a_\alpha m_\alpha}{\sum\limits_i a_i m_i^2}\right] z_\alpha - \left[\frac{m_n \sum\limits_\kappa \sum\limits_\alpha m_\alpha e_{\kappa\alpha}}{2\sum\limits_i a_i m_i^2}\right] p_\kappa \qquad \begin{matrix} \kappa,\alpha = 1,\dots,n-1, \\ i = 1,\dots,n. \end{matrix} \tag{3.12}$$

Условие максимума H по η_n

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial\eta_n^2} = 2\left[\sum_\kappa a_\kappa \left(\frac{m_\kappa}{m_n}\right)^2 + a_n\right] \ge 0 \quad \text{или} \quad \sum_i a_i m_i^2 \ge 0 \tag{3.13}$$

совпадает с (2.14).

Уравнения $\partial B/\partial\eta = 0$ /2/ стр. 41 (или $\dot p_\alpha = -\partial H/\partial z_\alpha$), запишутся так

$$\dot p_\alpha = 2a_\alpha z_\alpha - 2a_\kappa \frac{m_\alpha}{m_n}\eta_n - \sum_\kappa e_{\kappa\alpha} p_\kappa - b_{n\alpha} p_n \qquad \alpha = 1,\dots,n-1. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.12) в (3.9), (3.14), получим систему линейных дифференциальных уравнений порядка $2n-2$ с постоянными коэффициентами. Пусть не менее $n-1$ корней характеристического уравнения этой системы имеют отрицательные вещественные части (регулятор устойчив). Поступая аналогично пункту 1 § 2, т.е. отыскивая (2.10) и исключая t, получим для η_n выражение типа (2.13)

$$\eta_n = \sum_\kappa \tau_\kappa z_\kappa \qquad \text{или} \qquad \eta_n = \sum_\kappa u_\kappa \eta_\kappa \quad \kappa = 1,\dots,n-1, \tag{3.15}$$

где z_κ заменены при помощи (3.7), а τ_κ, u_κ - постоянные.

Дифференцируя последнее равенство в (3.15) по t, подставляя (1.1) и исключая η_n при помощи (3.15), получим закон управления на особой экстремали в открытой области $\xi = \sum_\kappa \ell_\kappa \eta_\kappa$ $\kappa = 1,\dots,n-1$, ℓ_κ -пост.

3^0. Покажем теперь, что в случае устойчивого регулятора с граничными условиями (1.2) в фазовом пространстве переменных η существует область, содержащая начало координат, в которой имеются особые экстремали. Пусть уравнения (1.1), (1.3), преобразованы к виду (3.8) - (3.11). Отбросим уравнение (3.10) и поставим вариационную задачу для системы (3.8) - (3.9). В этой системе η_n стало управлением. Повторяя выкладки, приведенные в § 2 п. 1 для z_κ и p_κ $(\kappa=1,\dots,n-1)$, получим выражения типа (2.11) из которых следует, что в случае устойчивого регулятора ($\mu_s < 0$) и граничных условий (3.11) при $t \to \infty$ постоянные $\bar{c}_\kappa = 0$ и, следовательно, переменные $p_\kappa \to 0$, $z_\kappa \to 0$. Но отыскивая η_n из уравнений $H_{\eta_n} = 0$ найдем, что η_n зависит линейно от p_κ, z_κ. Следовательно, при $t \to \infty$ переменная $\eta_n \to 0$. Дифференцируя выражение для η_n по t и заменяя $\dot{p}_\kappa$, $\dot{z}_\kappa$ их выражениями из $\dot{p}_\kappa = -H_{\eta_\kappa}$ и (3.9) снова найдем, что $\dot{\eta}_n$ будет линейно зависеть от p_κ, z_κ. Поэтому при $t \to \infty$ производная $\dot{\eta}_n \to 0$. Т.к. с ростом t величины , $\dot{\eta}_n, z_\kappa \to 0$, то из (3.10) следует, что наступит момент, когда $|m_n \xi| < |m_n \xi^*|$, т.е. в пространстве переменных z существует область U_{n-1} размерности $n-1$, в которой уравнение (3.10) может быть удовлетворено значениями $|\xi| < \xi^*$. А это говорит о том, что в этой области есть особая экстремаль (с порядком особенности равным 1). Уравнения (3.8) - (3.10) получены из (1.1), (1.3) линейным не особым преобразованием. Следовательно, и в пространстве переменных η имеется область, содержащая начало координат, в которой есть особая экстремаль.

Поскольку в пространстве η или z любая достаточно малая окрестность нуля содержит особую экстремаль, то особая экстремаль проходит через начало координат.

Повторяя рассуждения для системы (3.4) можно убедиться в справедливости теоремы:

Теорема 3.1. Пусть движение объекта регулирования описывается управляемой системой дифференциальных уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) и функционалом (1.3), причем $\tau \leq n$, $\xi_\beta^* > 0$. Пусть определители

$$|m_{\kappa\beta}|, \quad |a_\kappa m_{\kappa\beta}| \quad (\kappa,\beta=\nu+1,\dots,n), \quad \Big|\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa m_{\kappa\beta} m_{\kappa\gamma}\Big| \quad (\beta,\gamma=1,\dots,\nu), \quad \nu=n-\tau$$

не равны нулю, необходимое условие оптимальности (стр.150) особой экстремали выполнено, а ν корней характеристического уравнения системы (2.9) меньше нуля.

Тогда в некоторой окрестности начала координат пространства переменных η существует особая экстремаль с порядком особенности τ, проходящая через начало координат.

Из § 3, п. 1 вытекает, что если уравнения (1.1), (1.3) преобразованы к виду (3.4) и $\tau \leq n$, то все остальные требования теоремы можно заменить одним требованием: квадратичная форма $-\sum_{j,\gamma=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j}\,\partial z_{\nu+\gamma}} \delta z_{\nu+j} \delta z_{\nu+\gamma}$ должна быть положительно определенной.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $\tau = 1$, система (1.1) и функционал (1.3) таковы:

$$I=\int_0^\infty \sum_{i,\kappa} \tilde{a}_{i\kappa}\tilde{\eta}_i\tilde{\eta}_\kappa\,dt, \quad \dot{\tilde{\eta}}_1=\tilde{b}_{11}\tilde{\eta}_1+\tilde{b}\tilde{\eta}_2+m_1\xi, \quad \dot{\tilde{\eta}}_2=\tilde{b}_{11}\tilde{\eta}_1+\tilde{b}_{22}\tilde{\eta}_2+m_2\xi, \quad |\xi|\leq 1, \ a_{22}\neq 0, \qquad (3.16)$$

граничные условия (1.2). Уравнение (3.5) имеет вид: $\frac{\partial z}{\partial\tilde{\eta}_1}m_1+\frac{\partial z}{\partial\tilde{\eta}_2}m_2=0.$ Его первый интеграл $z=m_2\tilde{\eta}_1-m_1\tilde{\eta}_2$.

Вводя новые переменные $\eta_1 = m_2\tilde{\eta}_1 - m_1\tilde{\eta}_2$, $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$ придем к системе

$$I = \int_0^\infty \sum_{i,k} a_{ik}\eta_i\eta_k\,dt, \quad \dot{\eta}_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + m_2\xi \qquad (3.16)$$

с граничными условиями вида (1.2). Пусть для простоты $a_{ik} = a_{ki}$ и ,кроме того, $b_{12} \neq 0$. Т.к. в системе (3.16) управление входит только в последнее уравнение, то в открытой области изменения ξ это уравнение может быть отброшено, а в оставшейся системе η_2 начинает играть роль управления. Таким образом на особой экстремали имеем

$$H = p_1(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2) - a_{11}\eta_1^2 - 2a_{12}\eta_1\eta_2^2, \quad \dot{p}_1 = 2a_{11}\eta_1 + 2a_{12}\eta_2 - p_1 b_{12}, \qquad (3.17)$$

$$H_{\eta_2} = -2a_{22}\eta_2 - 2a_{12}\eta_1 + p_1 b_{12} = 0, \quad H_{\eta_2\eta_2} = -2a_{22} \leq 0. \qquad (3.18)$$

Из последнего неравенства следует необходимое условие оптимальности особой экстремали: $a_{22} \geq 0$. Исключая из 1-го интеграла системы (3.16), а именно $H=0$, переменную p_1 при помощи (3.18), получим:

$$\eta_2 = A\eta_1, \text{ где } A = -\frac{b_{11}}{b_{12}} \pm \frac{\sqrt{B}}{a_{22}b_{12}}, \quad B = a_{22}(a_{22}b_{11}^2 - 2a_{12}b_{12}b_{11} + a_{11}b_{12}^2), \qquad (3.19)$$

$$\xi = C\eta_1, \qquad C = \frac{1}{m_2}\left[b_{12}A^2 + A(b_{11} + b_{22}) - b_{21}\right]. \qquad (3.20)$$

Откуда видно, что помимо тривиального случая: $\eta_1 = \eta_2 = p_1 = p_2 = \xi \equiv 0$, особые экстремали возможны, если $B \geq 0$. Подставляя (3.19), (3.20) в (3.16) найдем: $\dot{\eta}_1 = \pm\frac{1}{a_{22}}\sqrt{B}\eta_1$, $\dot{\eta}_2 = \pm\frac{1}{a_{22}}\sqrt{B}\eta_2$. Из этих уравнений следует, что при $a_{22} > 0$ на одной особой экстремали (знак "-") решение приближается к началу координат, на другой (знак "+") удаляется от начала координат. Последнее решение для наших граничных условий не представляет интереса и должно быть отброшено. Т.к. особая экстремаль является поверхностью переключения, то нетрудно построить синтез оптимального управления в некоторой окрестности начала координат. Для случая отрицательных характеристических корней такой синтез изображен на фиг. 7.2а, для комплексных корней с отрицательной вещественной частью на фиг. 7.2б.

Замечания:

1) Т.к. $z_{\nu+j}$ играет роль управления, для него легко учесть ограничения типа $|z_{\nu+j}|\le z^*_{\nu+j}$, если они совместны с ограничением $|\xi|\le\xi^*$. В этом случае поступаем следующим образом.

Пусть из $\partial H/\partial z_{\nu+j}=0$ получили, что $|z_{\nu+j}|=z^*_{\nu+j}$. Подставив $z^*_{\nu+j}$ в $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{\nu_j}}\right)=0$, находим ξ.

Если $|\xi|<\xi^*$, берем $\xi_{опт}=\xi$. Если $|\xi|>\xi^*$, ограничения η^* и ξ^* не совместны. Момент схода с ограничения обязателен при $|z_{\nu+j}|<z^*_{\nu+j}$. Процедура аналогичная для χ ограничений и χ особых управлений ($\chi\le m$). Тем самым изложенный метод позволяет в ряде случаев просто учитывать ограничения на фазовые координаты.

2) Если $n=1$ ($m_1\ne0$), то из (2.4) следует, что $p_1\equiv0$. Следовательно, в $V_1=a_1\eta_1^2$ η_1 становится управлением. Решение состоит из движения по границе ξ в сторону минимума V_1 и особого участка $\eta_1\equiv0$, $\xi\equiv0$. Возмущение полностью гасится в течение конечного промежутка времени.

Если $n=2$, что исключая p_1, p_2 из (2.7) при помощи (2.4), (2.5) получим синтез оптимального управления (2.7) на особой экстремали без всяких интеграций (см. пример 3.1). Это стало возможным благодаря вырождению вариационной задачи на 2 единицы.

Если $n=3$, то привлекая первый интеграл $H=0$, можно получит около начала координат закон оптимального управления (2.13) на особой экстремали также без интеграций.

§ 4. Случай сложной особенности

В § 2 мы предполагали, что определитель $|W_{j\gamma}|\ne0$, в § 3, что определитель $|H_{z_{\nu+j}z_{\nu+\gamma}}|\ne0$ $(j,\gamma=1,\dots,m)$[1]. Все особые экстремали, удовлетворяющие этим условиям, можно назвать экстремалями с простыми особенностями. Для экстремалей с простыми особенностями имеет место утверждение: порядок вырождения вариационной задачи равен

---

1) Это, эквивалентно $|W_{\beta\gamma}|\ne0$.

удвоенному порядку ее особенности (гл. 6).

Особые экстремали, у которых определитель $|W_{j\gamma}|=0$ или в случае преобразованной задачи определитель $|H_{z_{\mu_j} z_{\mu_\gamma}}|=0$ $(j,\gamma=1,\dots,m)$ названы (гл. 5) экстремалями со сложными особенностями.

1°. Рассмотрим вначале случай сложной особенности для задачи с одним управлением в постановке § 2.

Если в (2.6) $\sum_\kappa a_\kappa m_\kappa^2=0$, то (2.6) не зависит от ξ. Дифференцируем (2.6) полным образом по t и подставляем $\dot{\eta}_\kappa$, $\dot{p}_\alpha$ из (1.1) и (2.2). Получим некоторое выражение

$$M^3(\eta,p,\xi)\equiv\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)=0. \qquad (4.1)$$

Если M^3 не содержит ξ, то дифференцируем его еще раз полным образом по t: $M^4\equiv\frac{d^4}{dt^4}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)$ и т.д. Пусть после конечного числа γ таких дифференцирований в M^γ появилось ξ. Тогда из $M^\gamma=0$ можно найти управление ξ. Кроме того, мы будем иметь γ соотношений вида $M^0\equiv H_\xi=0$, $M^1\equiv d/dt(H_\xi)=0,\dots,M^{\gamma-1}\equiv d/dt(M^{\gamma-2})=0$, не содержащих ξ и линейных относительно η, p. Если эта система линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно переменных η, p имеет функциональную матрицу с рангом τ ($\tau\leq 2n$), то τ переменных η, p на особой экстремали могут быть найдены без всяких интеграций и порядок вырождения особой экстремали равен τ. Если же $\tau\geq 2n$, то число независимых уравнений больше числа переменных и особая экстремаль - невозможна[1)]. Условие входа на особую экстремаль - выполнение в момент входа γ соотношений $M^i=0$ $(i=0,1,\dots,\gamma-1)$. Необходимое условие схода и необходимое условие оптимальности - γ должно быть четным и $\partial M^\gamma/\partial\xi\geq 0$.

2°. Рассмотрим теперь сложную особенность с одним управлением в условиях преобразованной задачи § 3. Сложная особенность появится, если определитель $|H_{\eta_n\eta_n}|\equiv 0$, т.е. (3.8), (3.9) линейно зави-

---

1) Или тривиальна: $\eta(t)\equiv 0$, $p(t)\equiv 0$, $\xi(t)\equiv 0$.

сят от η_n. В этом случае к системе (3.8), (3.9) мы снова можем применить описанный в § 3 метод преобразований и сосредоточить η_n в одном уравнении, пусть для определенности $n-1$. Условно "отбрасывая" это уравнение, мы получим, что в оставшейся системе z_{n-1} станет управлением. Если оно в подинтегральное выражение функционала входит линейно, то процедура повторяется и так до тех пор пока некоторое $z_{n-\sigma}$ не будет входить под интеграл (3.8) в квадрате и, следовательно, может быть найдено. Предположим, что такое преобразование было проделано σ раз ($\sigma \leq n$). Для определенности будем считать, что линейные управления были сосредоточены в последних σ уравнениях. Подвергая аналогичному преобразованию только эти последние σ уравнений мы в каждом из них можем сосредоточить только одно управление. В результате мы придем к системе

$$I = \int_0^\infty \sum_{\alpha,\beta=1}^{\omega} C_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta \, dt, \quad \dot z = \sum_{\gamma=1}^{\omega} u_{i\gamma} z_\gamma \quad (i=1,\dots,\omega) \quad \dot z_{\omega+j} = \sum_{\gamma=1}^{\omega} W_{j\gamma} z_\gamma + K_j z_{\omega+j+1}$$

$$(j=1,\dots,n-\omega-1), \quad \dot z_n = \sum_{\gamma=1}^{\omega} W_{n\gamma} z_\gamma + m_n \xi, \quad \text{где } C_{\alpha\beta}, u_{i\gamma}, W_{j\gamma}, W_{n\gamma} - \text{пост.}, \ \omega = n-\sigma. \tag{4.2}$$

Назовем число σ порядком сложности особой экстремали.

Заметим, что если $\sigma > n$, то особая экстремаль невозможна. В самом деле, отбросив последнее n-е уравнение (3.3) видим, что новое "управление" z_1 будет входить под интеграл линейно, а т.к. оно неограничено и $t_2 \neq t_1$, то $\min J = -\infty$. Очевидно, что при $a_\kappa > 0$ в (1.3') минимум не может быть отрицательным.

Если $\sigma \leq n$, то порядок вырождения особой экстремали будет равен 2σ. Особое управление ξ может быть найдено из $d^\sigma/dt^\sigma(H_{z_\omega}) = 0$. Необходимое условие оптимальности особой экстремали со сложной особенностью $H_{z_\omega z_\omega} \geq 0$. Условие входа: подбор таких начальных значений $p_{n-i}(0)$ $(i=1,\dots,\sigma)$, чтобы в момент входа на особую экстремаль $p_{n-i} = 0$. Достаточное условие схода $H_{z_\omega z_\omega} > 0$. Движение по особой экстремали возможно, если ξ удовлетворяет ограничению $|\xi| \leq \xi^*$.

Если граничные значения η на правом конце были не нулевые, то из них, вообще говоря, можно удовлетворить только $n-\sigma+1$ компонент.

В самом деле, σ начальных значений p_i были "израсходованы" на вход в особый режим, а взамен в нашем распоряжении остался только подбор момента схода с особой экстремали. Таким образом, использование сложных особых экстремалей с регулярным сходом возможно только при специально подобранных граничных условиях на правом конце. В частности, они возможны для граничных условий (1.2) $\eta(\infty)=0$, т.к. все наши преобразования были линейные и переводили начало координат фазового пространства η в начало координат z . В случае же устойчивого регулятора все $|\eta_k| \to 0$, следовательно все $|z_k| \to 0$ и $|\xi| \to 0$, а поэтому, если сложная особая экстремаль находится в достаточно малой окрестности начала координат, то как видно из системы (4.2) она проходит через начало координат.

3°. Рассмотрим теперь случай сложной особенности в постановке задачи § 2, когда действует одновременно несколько особых управлений. Пусть матрица $F = \|W_{\beta\gamma}\|$ имеет ранг $\sigma < m$. Тогда согласно теореме о разрешимости неявных функций между переменными η, p системы (2.6) имеется $\mu = m - \sigma$ тождеств[1)]

$$L^{\zeta}(\eta, p) \equiv \sum_{\alpha} C_{\zeta\alpha}\eta_{\alpha} + \sum_{\kappa} e_{\zeta\kappa} p_{\kappa} = 0 \quad (\zeta = 1, \dots, \mu),\ C_{\zeta\alpha}, e_{\zeta\kappa} - \text{пост.}, \tag{4.3}$$

не содержащих управления ξ . Дифференцируя их полным образом по t и исключая $\dot{\eta}, \dot{p}$ при помощи (1.1') и (2.2), получим уравнения

$$M^{\zeta}(\eta, p, \xi) \equiv \sum_{\alpha} \bar{C}_{\zeta\alpha}\eta_{\alpha} + \sum_{\kappa} \bar{e}_{\zeta\kappa} p_{\kappa} + \sum_{\beta} d_{\zeta\beta}\xi_{\beta} = 0 \quad (\zeta = 1, \dots, \mu). \tag{4.4}$$

Пусть для определенности неравный нулю минор порядка σ матрицы F был расположен в верхнем левом углу матрицы[2)]. Заменим последние μ уравнений (2.6) уравнениями (4.4) и составим функциональную матрицу новой системы относительно ξ_{β} $(\beta = 1, \dots, m)$. В результате такой замены ранг новой матрицы F_1 может только возрасти на

---

1) В качестве $L^{\zeta} = 0$ можно взять те из уравнений (2.6), которые не содержат ξ_{γ} .

2) Если это не так, то перестановкой строк и столбцов и изменением порядка нумерации ξ_{β} это всегда можно достигнуть.

величину $0 \le \nu_1 \le \mu$. Если $\nu_1 = \mu$, т.е. $\sigma_1 = m$, то согласно теоремы о зависимости функций из вновь полученной системы σ уравнений (2.6) и μ уравнений (4.4)

$$d^2/dt^2(H_{\xi_\beta}) = 0 \quad (\beta = 1,\dots,\sigma \le m), \qquad M^3(\eta,p,\xi) = 0 \quad (\zeta = 1,\dots,\mu) \tag{4.5}$$

можно определить $m = \sigma + \mu$ особых управлений ξ_β. Если $\nu_1 < \mu$, то между переменными системы (4.5) существует $\mu_1 = m - \sigma - \nu_1$ зависимостей $N^\alpha(\eta,p) = 0$ $(\alpha = 1,\dots,\mu_1 \le \mu)$, не содержащих ξ_β. Поскольку тождества $N^\alpha = 0$ должны иметь место вдоль экстремали, то дифференцируя их полным образом по t и заменяя $\dot\eta, \dot p$ выражениями из (1.1') и (2.2) получим

$$G^\alpha(\eta,p,\xi) \equiv \sum_\kappa h_{\alpha\kappa}\eta_\kappa + \sum_\kappa g_{\alpha\kappa} p_\kappa + \sum_\beta q_{\alpha\beta}\xi_\beta = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,\mu_1) \tag{4.6}$$

Эти отношения равносильны N^α.

Заменим μ_1 уравнений системы (4.5), не вошедших в наивысший минор, определявший ранг F_1, μ_1 уравнениями (4.6). От такой замены ранг функциональной матрицы F_2 относительно ξ_β может возрасти на величину $0 \le \nu_2 \le \mu_1$. Если $\nu_1 = \mu_1$, т.е. $\sigma_2 = m$, из полученной системы можно определить все ξ_β $(\beta = 1,\dots,m)$. Если $\nu_2 < \mu_1$, то повторяя выше описанную операцию, получим последовательность $0 \le \nu_1 \le \le \nu_1 + \nu_2 \le \dots \le \sum_{i=1}^{\lambda} \nu_i = \zeta$, которая может только возрастать.

Ограничимся рассмотрением случая, когда после конечного числа γ таких операций величина ζ станет равной μ. В результате получим m уравнений, содержащих управления ξ_β с функциональной матрицей, имеющей ранг m. Следовательно, из этих уравнений можно определить все особые управления. Кроме того, будем иметь некоторое число зависимостей типа L, N, связывающих переменные η, p, и не содержащих ξ_β. Будем обозначать их через $T^\omega(\eta,p) = 0$ $(\omega = 1,\dots,\zeta)$. Если матрица $\| T_z^\omega \|$ $(\omega = 1,\dots,\zeta;\ z = \{\eta,p\})$ имеет ранг $\zeta' \le 2n$, то на особой экстремали имеют место ζ' независимых уравнений $T^\omega = 0$ $(\omega = 1,\dots,\zeta' < \zeta)$ и порядок вырождения вариационной задачи равен ζ'.

В самом деле любые ζ' уравнений (1.1'), (2.2) можно заменить ζ' конечными соотношениями $T^{\omega}=0$, из которых (ввиду их алгебраической независимости) можно определить ζ' переменных η, p без интегрирования. Отсюда в частности следует, что если $\zeta' > 2n$, то данная многократная сложная особая экстремаль - невозможна (либо $\eta(t)\equiv 0,\ p(t)\equiv 0,\ \xi(t)\equiv 0$). Вход на особую экстремаль со сложной особенностью возможен только в том случае, если в момент входа выполнены ζ' конечных соотношений $T^{\omega}=0$. Для этого надо "израсходовать" ζ' начальных значений p_i. Условием движения по особой экстремали со сложной особенностью является возможность схода при любом t и $|\xi_\beta| \le \xi_\beta^*$. Если на правом конце $\eta(\infty) \neq 0$, то подбирая моменты перехода на экстремали с меньшим порядком особенности мы можем, вообще говоря, удовлетворить только $n-\sigma+m$ граничным условиям. Таким образом, в общем случае при $\eta(t_2) \neq 0$, как и в случае одного управления, использование сложных особых экстремалей возможно только при специально подобранных граничных условиях. Однако граничные условия (1.2) удовлетворяют особым экстремалям со сложной особенностью. В самом деле соотношения $T^{\omega}=0$ - линейные относительно η, p. Как следует из § 2 в устойчивом регуляторе $\eta(\infty)=0$, $p(\infty)=0$. Следовательно, при $t=\infty$ они выполняются, а это говорит о том, что сложная особая экстремаль возможна в ~~районе~~ окрестности начала координат фазового пространства η.

4°. <u>В условиях преобразованной задачи § 3 (m-особых управлений)</u> экстремаль со сложной особенностью возникнет, если матрица $F \equiv \| \partial^2 H / \partial z_{\nu+j} \partial z_{\nu+\gamma} \| \ (j,\gamma=1,\dots,m)$ имеет ранг $\sigma < m$. В отношении функций $z_{\nu+j}$ здесь применимы все теже рассуждения, которые приведены в предыдущем пункте этого параграфа. Только η_α следует везде заменить на z_i $(i=1,\dots,\nu;\ \nu=n-r)$, а ξ_β на $z_{\nu+j}$ $(j=1,\dots,m)$. Особое управление ξ_β можно найти дифференцируя полным образом по t соотношения, относительно которых соблюдалось условие о ранге матрицы F и исключая из полученных выражений $\dot{z}$, $\dot{p}$.

Заметим, что изложенные здесь результаты без труда распространяются на системы (1.1') и функционал (1.3') с коэффициентами $b_{\kappa\alpha}$, $m_{\kappa\beta}$, a_κ являющимися непрерывными и дифференцируемыми соответствующее число раз функциями t.

Выводы и основные результаты ч.II гл.8

1. Получено, что в окрестности начала координат пространства переменных η существует особая экстремаль с порядком особенности τ, проходящая через начало координат.

2. На особой минимали, проходящей через начало, закон регулирования имеет вид $\xi_\beta = \ell_{\beta\alpha}\eta_\alpha$, $\beta=1,\dots,m$; $\alpha=1,\dots,\nu=n-m$, $\ell_{\beta\alpha}$-пост.

3. Существует окрестность, содержащая начало координат, в которой регулятор устойчив.

4. При прочих равных условиях абсолютный минимум достигается на особой минимали, имеющей наивысший порядок особенности.

5. По особому решению можно идти и в скользящем режиме, используя закон

$$\xi_\beta = sign\,(n_{\beta\alpha}\eta_\alpha), \quad \text{где } n_{\beta\alpha} - \text{пост.}$$

6. Для системы 2-го порядка в случае отрицательных действительных корней и комплексных корней с отрицательной вещественной частью - построен синтез (фиг.81а,б).

III. Задача построения предельного цикла или задача стабилизации колебаний

§ 1. Постановка задачи. Решение задачи

Пусть поведение объекта описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad (i=1,\dots,n-1), \quad \dot{x}_n = h_j x_j + mu \quad (j=1,\dots,n), \ |u|\le 1, \quad m \ne 0. \qquad (1.1)$$

Здесь h_j, m - постоянные, u - скаляр. Задан предельный цикл $V_j = V_j(t)$ $j=1,\dots,n$; $V_j(t)$ - периодические функции с общим периодом ℓ, которые можно представить в виде ряда $V_j(t) = \frac{1}{2}a_{j0} +$

$+\sum_{\kappa=1}^{s}\left(a_{j\kappa}\cos\frac{\kappa\pi}{l}t+b_{j\kappa}\sin\frac{\kappa\pi}{l}t\right)$. Требуется выбрать такое управление u, чтобы $x_i(t)$ были максимально близки к соответствующим $V_i(t)$ в смысле минимума интегральной оценки (функционала)

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}q_j\left[x_j-V_j(t)\right]^2dt,\quad q_j=const>0. \tag{1.2}$$

Граничные значения $x_i(0)=x_{i0}$, $x_i(\infty)$ - свободны. Запишем Гамильтониан

$$H=p_ix_{i+1}+p_n(a_jx_j+mu)-\frac{1}{2}q_j(x_j-V_j)^2. \tag{1.3}$$

Из условия $\sup\limits_u H$, имеем либо $u=sign\,p_4m$, либо $\partial H/\partial u=$ $=p_4m=0$. Последний случай соответствует особой экстремали. Его мы и рассмотрим. Так как $m\neq 0$, то $p_n=0$. Следовательно, на особой экстремали сопряженная система имеет вид

$$\dot p_1=q_1(x_1-V_1),\ \ \dot p_2=q_2(x_2-V_2)-p_1,\dots,\ \dot p_{n-1}=q_{n-1}(x_{n-1}-V_{n-1})-p_{n-2},\ \overbrace{q_n(x_n-V_n)}^{-p_{n-1}=0}. \tag{1.4}$$

Исключим при помощи последнего уравнения (1.4) x_n из уравнения $\dot x_{n-1}=x_n$ (1.1). Тогда из (1.1) и (1.4) получим

$$\dot x_1=x_2,\ \ \dot x_2=x_3,\dots,\ \dot x_{n-2}=x_{n-1},\ \ \dot x_{n-1}=V_n+p_{n-1}/q_n, \tag{1.5}$$

$$\dot p_1=q_1(x_1-V_1),\ \ \dot p_2=q_2(x_2-V_2)-p_1,\dots,\ \dot p_{n-1}=q_{n-1}(x_{n-1}-V_{n-1})-p_{n-2}. \tag{1.6}$$

Система (1.5), (1.6) $2n-2$ порядка есть система неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. При довольно общих предположениях частное решение этой системы можно взять таким

$$X_i(t)=\frac{1}{2}\tilde A+\sum_{\kappa=1}^{s+1}\left(\tilde A_{i\kappa}\cos\frac{\kappa\pi}{l}t+\tilde B_{i\kappa}\sin\frac{\kappa\pi}{l}t\right),\quad \tilde A,\tilde B=const,\ \ p_i(t)\equiv 0. \tag{1.7}$$

Так как однородные системы, получаемые из (1.5), (1.6) и определяющие x и p сопряжены, то вместе с каждым корнем λ характеристического уравнения систем (1.5), (1.6) входит, как известно /61/, корень $-\lambda$. Поэтому, полагая для простоты, что все корни различные, имеем:

$$x_s=A_{si}e^{-\lambda_it}+B_{si}e^{\lambda_it}+X_s,\qquad p_s=A'_{si}e^{-\lambda_it}+B'_{si}e^{\lambda_it}. \tag{1.8}$$

При $t \to \infty$, переменные $x(t)$ должны стремиться к установившемуся периодическому решению $X(t)$, а из условия трансверсальности $p(\infty)=0$. Поэтому $B_{si}, B'_{si}=0$ и (1.8) дает

$$x_s = A_{si} e^{-\lambda_i t} + X_i , \qquad p_s = A'_{si} e^{-\lambda_i t} \quad (s=1,\dots,n-1) . \qquad (1.9)$$

Введем новые переменные $z_s = x_s - X_s(t)$ и исключим из (1.9) время t. Получим $p_s = N_{si} z_i$, где N_{si} -пост. Подставляя это выражение в последнее уравнение в (1.4) и обозначая через $z_n = x_n - V_n$, найдем, что $C_j z_j = 0$, C_j =пост. Это выражение определяет гиперплоскость особых решений, проходящую через начало координат z. Так как в "усеченной" системе последнее уравнение (1.1) не участвовало, то положение этой гиперплоскости не зависит от h.

Подставляя $p_s = N_{si} z_i$ в $d^2/dt^2(H_u)=0$ найдем закон управления

$$u = \tau_j z_j + U(t) \qquad \tau = const, \quad j=1,\dots,n. \qquad (1.10)$$

Таким образом управление состоит из главной периодической части $U(t)$ и коррекции на отклонение от периодического решения $X(t)$ наиболее близкого к $V(t)$ в смысле (1.2).

Выводы и основные результаты

1. В открытой области управления при $t \to \infty$ решение $x(t)$ стремится к некоторому устойчивому периодическому особому решению $X_i(t)$ (предельному циклу).

2. Оптимальное управление на особом решении имеет вид

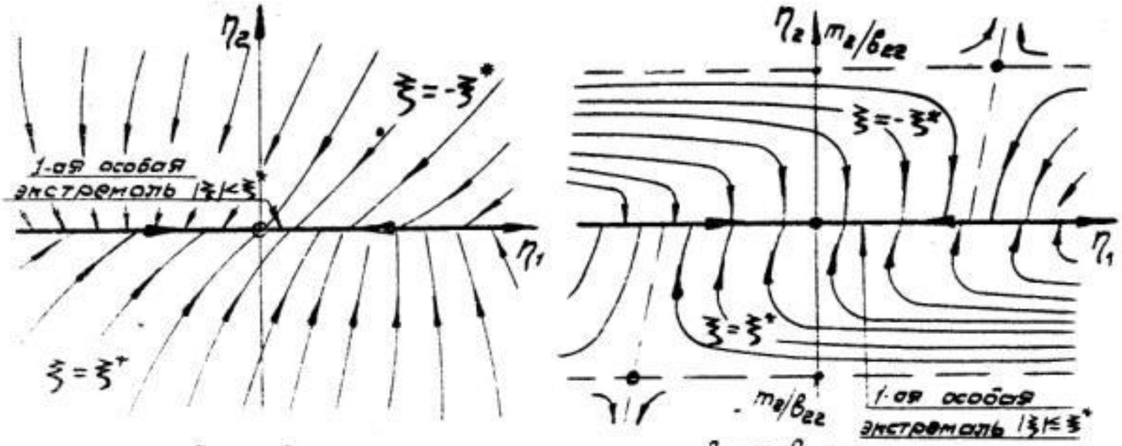
$$\xi_\beta = \ell_{\beta i} z_i + L_\beta(t) \quad ,$$

где $L_\beta(t)$ - периодическая функция (главная часть управления), $z_i = \eta_i - X_i$ - отклонение от предельного цикла $X_i(t)$ и $\ell_{\beta i}$ -пост.

3. Существует гиперплоскость особых решений, проходящая через начало в системе координат z_i ($i=1,2,\dots,n$).

4. По особому решению можно идти и в скользящем режиме, используя синтез:

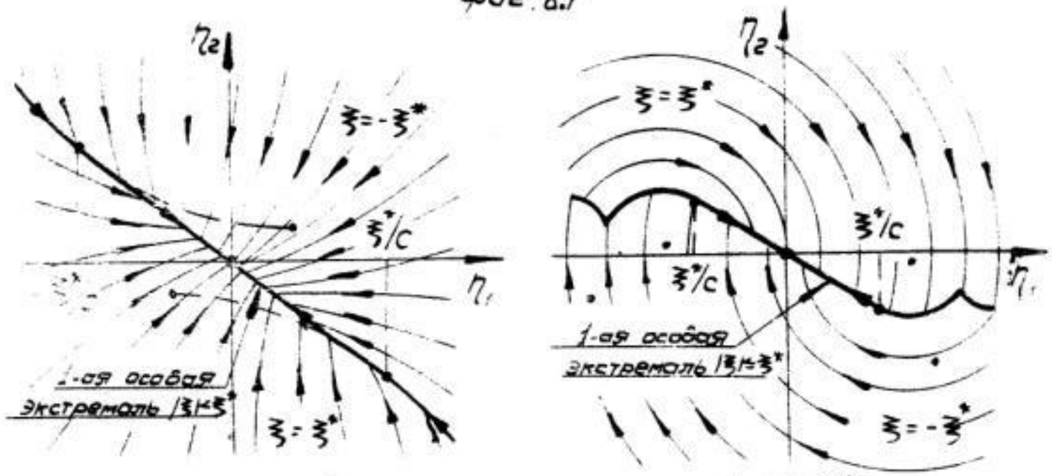
$$\xi_\beta = sign\,(C_{i\beta} z_i) \qquad , \text{ где } \quad C_{i\beta} \text{ -пост.}$$



$b_{11}<0,\ b_{22}<0,\ m_2>0.$ $b_{11}<0,\ b_{22}>0,\ m_2>0$

а б

фиг. 8.1



$\lambda_1<0,\ \lambda_2<0$ $\lambda_{1,2}=a\pm bi$

а б

фиг. 8.2

ГЛАВА 9

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

§ I. Задача о минимуме интегрального тепла при входе летательного аппарата в атмосферу.

I°. Угол входа в атмосферу планеты летательного аппарата выбирается достаточно малым, поэтому полагая $\cos\theta \approx 1$ (θ – угол наклона траектории к местной линии горизонта) уравнения входа летательного аппарата как материальной точки таковы (без учета дальности полета):

$$\dot H = V\sin\theta \quad , \tag{I.I}$$

$$\dot V = -\frac{X(\alpha,V,H)}{m} - g\sin\theta \ , \tag{I.2}$$

$$\dot\theta = \frac{Y(\alpha,V,H)}{mV} - \frac{g}{V} + \frac{V}{R} \ . \tag{I.3}$$

Здесь H – высота полета, V – скорость, X – сопротивление, α – угол атаки, g – гравитационное ускорение планеты, Y – подъемная сила, m – масса летательного аппарата, R – расстояние до центра планеты, $R = R_0 + H$, где R_0 – радиус планеты.

Сопротивление и подъемная сила летательного аппарата определяются формулами

$$X = (C_{x_0} + B\alpha^2)\frac{\rho V^2}{2}S\ , \qquad Y = A\alpha\frac{\rho V^2}{2}S\ , \tag{I.4}$$

где C_{x_0} – коэффициент сопротивления при $\alpha = 0$, $\rho(H)$ – плотность атмосферы, S – характерная площадь, A, B – положительные постоянные.

Заданы начальные условия входа: H_0, V_0, θ_0, моменты t_1, t_2 и конечная высота $H_к$. Значения $V_к, \theta_к$ – свободны.

Управление осуществляется углом атаки α. Требуется указать множество траекторий при движении, по которым к летательному аппарату будет подведено тепла меньше некоторой величины.(задана "δ"). Количество тепла, подведенного к аппарату, дается интегралом

$$I = \int_{t_1}^{t_2} K_q\,\rho^{0,5}V^{3,15}\,dt. \tag{I.5}$$

2° Для решений этой задачи воспользуемся методами β – функционала (гл.I) в сочетании с методом обратной подстановки. Возьмем ψ в виде

$$\psi = C_1\left(Hg + \tfrac{1}{2}V^2\right) + C_2\theta ,$$

где C_1, C_2 – постоянные. Этой функции соответствует функционал (гл.I, §4)

$$\beta = \inf_{\alpha}\left[\psi_{x_i} f_i - \psi_t\right] = -\inf_{\alpha}\left[+C_1 V \frac{(C_{x_0} + B\alpha^2)\frac{\rho V^2}{2} S}{m} - C_3 \frac{1}{mV} A\alpha \frac{\rho V^2}{2} S + C_3 \frac{g}{V} - C_3 \frac{V}{R}\right] = \tag{I.6}$$

$$= -\frac{C_1 C_{x_0} \rho S}{2m} V^2 + \left(\frac{A^2 C_3^2 \rho S}{8mB} - C_3 g\right)\frac{1}{V} + \frac{C_3}{R} V$$

с оптимальным управлением

$$\bar{\alpha} = \frac{A}{2B} \cdot \frac{C_3}{C_1 V^2}, \qquad C_1 > 0. \tag{I.7}$$

Он определен на тех же самых допустимых кривых (I.I)-(I.3). Значения C_1, C_3 подбираются так, чтобы удовлетворить заданному $H_к$ на правом конце.

Закон (I.7) дает синтез оптимального (в смысле абсолютного минимума) управления на допустимых кривых функционала (I.6).

Лучшие решения нашего исходного функционала (I.5) будут находиться внутри области (теор. 4.I гл.I): $f_0 + \beta \le \bar{f}_0 + \bar{\beta}$ или

$$K_q \rho^{0.5} V^{3.15} - \frac{C_1 C_{x_0} \rho S}{2m} V^2 + \left(\frac{A^2 C_3^2 \rho S}{8mB} - C_3 g\right)\frac{1}{V} + \frac{C_3}{R} V \le$$

$$\le K_q \bar{\rho}^{0.5} \bar{V}^{3.15} - \frac{C_1 C_{x_0} \bar{\rho} S}{2\bar{m}} \bar{V}^2 + \left(\frac{A^2 C_3^2 \bar{\rho} S}{8\bar{m}B} - C_3 g\right)\frac{1}{\bar{V}} + \frac{C_3}{R}\bar{V} \tag{I.8}$$

где чертой сверху обозначены значения переменных на абсолютной минимали функционала (I.6), т.е. решения системы (I.I)-(I.3) с управлением (I.7).

Найдем зависимость левой части (I.8) от V. Объединяя очевидным образом постоянные слева (I.8) получим, что на каждой фиксированной высоте неравенство (I.8) имеет вид:

$$a_1 V^{3.15} - a_2 V^2 + a_3 \frac{1}{V} + a_4 V \le a_5, \quad a_i - const. \tag{I.9}$$

Здесь по физике задачи a_1, a_2, a_4 – положительны. Зависимость левой части (I.9) от V изображена на фиг.9.I. Множество значений V отсекаемых неравенством (I.8) не пусто, т.к. справа стоит допустимая траектория. Таким образом для каждой высоты мы получаем диапазон скоростей (V_1, V_2) внутри которого выделение тепла будет не больше чем при движении с управлением (I.7). Нанося эти значения на график HV (фиг.9.2) получим "коридор входа", при движении внутри которого летательный аппарат будет нагреваться меньше, чем с управлением (I.7).

Интересно, что здесь для получения качественной картины движения не пришлось интегрировать уравнения движения (I.I) - (I.3).

§ 2. Задача о полете на максимальную дальность ракеты или самолета с двигателем постоянной[I)] тяги.

Уравнения, описывающие движение летательного аппарата на постоянной высоте, следующие

$$\dot{L} = V \quad , \tag{2.I}$$

$$\dot{V} = \frac{V_e\beta - X(V)}{m} \quad , \tag{2.2}$$

$$\dot{m} = -\beta \tag{2.3}$$

Здесь L - дальность полета, V - скорость, β - расход топлива (управление), V_e - скорость истечения продуктов сгорания, $V_e > 0$, m - масса летательного аппарата, X - сопротивление, $X = aV^2$, $a > 0$ - постоянная, $a = C_x\frac{\rho S}{2}$, C_x - коэфф. сопротивления, ρ - плотность воздуха, S - площадь крыла. Заданы время полета $[t_1, t_2]$ и расход массы $m_1 - m_2$. Начальная и конечная скорость равны друг другу: $V_1 = V_2$. Обычно задача ставится следующим образом: найти закон расхода массы $\beta(t)$, обеспечивающий максимум дальности. Эта задача для случая не фиксированного времени решалась Миеле [38]. Он получил качественную картину движения. Для получения численных результатов по его методу необходимо интегрировать систему (2.I) - (2.3).

На примере этой и последующей (§ 3) задач покажем каким образом методом максимина можно получать простые оценки снизу в задачах динамики полета, которые как показывают примеры, очень близки к абсолютному минимуму.

Зададимся функцией $\psi = y_1 V + y_2 m$, где y_1, y_2 - постоянные. Составим функцию B :

$$B = -V - y_1\left(\frac{V_e\beta - aV^2}{m}\right) + y_2\beta \, .^{2)} \tag{2.4}$$

I) ЖРД и ТРД можно в известном смысле назвать двигателями постоянной тяги (при заданном расходе топлива), ибо их тяга сравнительно мало зависит от скорости полета.

2) Мы ищем $\max L$, поэтому берем $f_0 = -V$. В силу равенства $\min(-I) = -\sup I$ для получения правильного результата в окончательном ответе надо изменить знак.

Из условия $\inf_{\beta, v} B > -\infty$ находим

$$B_\beta = -y_1 \frac{V_e}{m} + y_2 = 0, \qquad m = \frac{y_1 V_e}{y_2}, \tag{2.5}$$

$$B_v = -1 + y_1 \frac{2a}{m} v = 0, \quad v = \frac{m}{2a y_1} = \frac{V_e}{2a y_2}, \quad B''_{vv} = y_1 \frac{2a}{m} = \frac{2a}{V_e} y_2 > 0, \; y_2 > 0. \tag{2.6}$$

Исключая m и v из (2.4) при помощи (2.5), (2.6), получим: $\bar{B} = -\frac{V_e}{4a y_2}$. Интегрируя это выражение (оно постоянно), составляя обобщенный функционал: $J = A + \int_{t_1}^{t_2} \bar{B} dt$ и учитывая, что $V_1 = V_2$, найдем

$$J = y_2 (m_2 - m_1) - \frac{V_e}{4a y_2} (t_2 - t_1). \tag{2.7}$$

Из условия $\sup_{y_2} J$ следует

$$y_2 = \sqrt{\frac{V_e (t_2 - t_1)}{4a (m_2 - m_1)}}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7) и учитывая сноску 2 на стр. 251, окончательно получаем следующую оценку снизу

$$\bar{J} = \sqrt{\frac{V_e (t_2 - t_1)(m_1 - m_2)}{a}}, \qquad L_{max} \le \bar{J}. \tag{2.9}$$

Пример 2.1. Самолет с ЖРД с данными: $S = 20$ см^2, $V_e = 2500$ м/сек, $C_x = 0{,}05$ (при $C_y = 0{,}5$), весом $G = 3840$ кг, совершает полет на $H = 18$ км ($\rho = 0{,}0123$). Запас топлива (в единицах массы): $\Delta m = 77{,}5$ $\frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}}$. Требуется найти оценку максимальной дальности полета.

Вначале для сравнения найдем какова дальность полета при постоянном режиме работы двигателя. Для полета на данной высоте и данном весе необходима скорость

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3840}{0{,}5 \cdot 0{,}0123 \cdot 20}} = 250 \text{ м/сек},$$

тяга $P = \frac{G}{K} = \frac{G C_x}{C_y} = 384$ кг и, следовательно, расход топлива $\beta = \frac{P}{V_e} = \frac{384}{2500} = 0{,}155 \frac{\text{кг сек}}{\text{м}}$. Время работы двигателя при этом будет $\Delta t = \frac{\Delta m}{\beta} = \frac{77{,}5}{0{,}155} = 500$ сек и, следовательно, дальность составит $L = V \cdot \Delta t = 250 \cdot 500 = 125\,000$ м $= 125$ км.

Найдем оценку по формуле (2.9), полагая $t_2 - t_1 = 500$ сек. Вычислим величину

$$a = C_x \frac{\rho S}{2} = 0{,}05 \frac{0{,}0123 \cdot 20}{20} = 0{,}00614.$$

Подставляя наши данные в (2.9), получим

$$L_{max} \le \sqrt{\frac{2500 \cdot 500 \cdot 77{,}5}{0{,}00614}} = 127\,000 \text{ м} = 127 \text{ км}.$$

Откуда видно, что предлагаемая оценка близка к нижней грани функционала и, в частности, режим постоянного расхода массы очень мало отличается от оптимального.

Пример 2.2. Самолет с ТРД и данными: $S=20\ м^2$, $C_x=0{,}05$ (при $C_y=0{,}25$), весом … совершает горизонтальный полет на $H=11$ км ($\rho=0{,}0123$). Запас топлива (массы) $\Delta m=340\ \frac{кг\cdot сек^2}{м}$, удельный расход ТРД: $C_e=1{,}5\ \frac{кг}{кг}\frac{тяг}{тяги\cdot час}$.

Вычислим значение дальности данного самолета при постоянном режиме работы двигателя. Необходимая горизонтальная скорость у самолета такова

$$V=\sqrt{\frac{2G}{C_y\rho S}}=\sqrt{\frac{2\cdot 111000}{0{,}25\cdot 0{,}0123\cdot 20}}=600\ м/сек$$

и тяга $P=\frac{G}{K}=\frac{G C_x}{C_y}=\frac{111000\cdot 0{,}05}{0{,}25}=2220\ кг$. Время полета при данной тяге, запасе топлива и удельном расходе равно: $\Delta t=\frac{\Delta G}{C_e\cdot P}=\frac{\Delta m\, g}{C_e\cdot P}=\frac{340\cdot 9{,}81}{1{,}5\cdot 2220}=1\ час=3600\ сек$. Следовательно, дальность полета при постоянном режиме работы двигателя составит: $L=V\Delta t=600\cdot 3600=2160\,000\ м=2160\ км$.

Найдем оценку по формуле (2.9) при той же продолжительности полета $\Delta t=3600\ сек$:

$$a=C_x\cdot\frac{\rho S}{2}=0{,}05\,\frac{0{,}0123\cdot 20}{2}=0{,}00614,\quad V_e=\frac{P}{\beta}=\frac{P\Delta t}{\Delta m}=\frac{2220\cdot 3600}{340}=23500\ \frac{м}{сек}.$$

$$L_{max}\leq\sqrt{\frac{23500\cdot 3600\cdot 340}{0{,}00614}}=2165\,000\ м=2165\ км.$$

Как видим оценка является эффективной для летательных аппаратов с разными типами двигателей.

§ 3. Задача о полете на максимальную дальность самолета (дирижабля) с двигателем постоянной мощности.

Для летательных аппаратов с ТВД и поршневыми двигателями, при заданном положении сектора газа, мощность двигателя практически не зависит от скорости полета. В настоящее время используются винты переменного шага, у которых в широком диапазоне крейсерских скоростей к.п.д. практически постоянно. В этом случае принимая, что мощность двигателя линейно зависит от расхода топлива, зависимость тяги от скорости и расхода можно представить следующей формулой

$$P=b\,\frac{\beta}{V}, \tag{3.1}$$

где b – постоянная, β – расход топлива.

Подставляя (3.1) в (2.1)–(2.3) получим следующие уравнения горизонтального полета самолета

$$L^{\cdot}=V, \tag{3.2}$$

$$\dot V = \frac{b\frac{\beta}{V} - aV^2}{m}, \qquad (3.3)$$

$$\dot m = -\beta. \qquad (3.4)$$

Пусть t_1, t_2, m_1, m_2 – заданы, а $V_1 = V_2$. В (3.2)-(3.4) β - расход топлива (управление).

Применим метод максимина для получения оценки в этой задаче. Возьмем $\Psi = y_1 V + y_2 m$ и составим функцию

$$B = -V - y_1\left(\frac{b\frac{\beta}{V} - aV^2}{m}\right) + y_2\beta. \qquad (3.5)$$

Из условия $\inf\limits_{\beta, V} B$ следует

$$B_\beta = -y_1\frac{b}{mV} + y_2 = 0, \quad mV = \frac{b\, y_1}{y_2}, \quad B_V = -1 + \frac{a}{b}y_2 3V^2 = 0, \quad V = \sqrt{\frac{b}{3a\, y_2}},$$

$$B_{VV} = 6\,\frac{a}{b}\, y_2 V > 0, \quad y_2 > 0.$$

Подставляя найденные m, V в (3.5), получим

$$\bar B = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{3a\, y_2}}.$$

Составим обобщенный функционал, учитывая, что $V_1 = V_2$. Тогда

$$J = y_2(m_2 - m_1) - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{3a\, y_2}}\,(t_2 - t_1). \qquad (3.6)$$

Из условия $\sup\limits_{y_2} J$ вытекает

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{b(t_2 - t_1)^2}{27a(m_1 - m_2)^2}}.$$

Или подставляя это значение в (3.6) и учитывая сноску I на стр. получим окончательную оценку

$$\bar J = \sqrt[3]{\frac{b(m_1 - m_2)(t_2 - t_1)^2}{a}}, \qquad L_{max} \le \bar J. \qquad (3.7)$$

Пример 31. Самолет с поршневым двигателем и данными: $S = 40\,м^2$; $C_x = \overset{0{,}05}{\cancel{1}}$ (при $C_y = 0{,}6$), мощностью двигателя $N = 1545$ л.с, к.п.д. винта $\eta = 0{,}8$, весом $G = 1130$ кг, запасом топлива $\Delta m = 78{,}7\,\frac{кг\,сек^2}{м}$, удельным расходом топлива $C_e = 0{,}25\,\frac{кг}{л.с.час}$, совершает полет на высоте $H = 3$ км ($\rho = 0{,}0927$). Требуется найти оценку максимальной дальности полета.

Найдем его дальность при постоянном положении сектора газа. Необходимая скорость полета такова

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y\rho S}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1130}{0{,}6\cdot 0{,}0927\cdot 40}} = 100\ м/сек.$$

Время полета

$$\Delta t = \frac{\Delta m\cdot g}{75\, N C_e} = \frac{78{,}7\cdot 9{,}81}{1545\cdot 0{,}25} = 2\ часа.$$

Мощность $N = 1545$ л.с. вполне достаточна для горизонтального полета:

$P_{потр} = P_{расп}$ (потребная тяга равна располагаемой):

$$P_{потр} = \frac{G C_x}{C_y} = \frac{11130 \cdot 0{,}05}{0{,}6} = 927 \text{ кг}, \quad P_{расп} = \frac{75 N \eta}{V} = \frac{75 \cdot 1545 \cdot 0{,}8}{100} = 927 \text{ кг}.$$

Следовательно, дальность полета при заданной мощности [redacted]

$$L = V \Delta t = 100 \cdot 2 \cdot 3600 = 720\ 000 \text{ м} = 720 \text{ км}$$

Найдем оценку максимальной дальности для $\Delta t = 2$ часа. Вычислим коэффициент в (3.3). Из равенства потребной и располагаемой мощности: $75 \eta N = PV$ найдем P и приравняем (3.I). Откуда найдем

$$b = \frac{75 N \eta}{\beta} = \frac{75 N \eta \Delta t}{\Delta m} = \frac{75 \cdot 1545 \cdot 0{,}8 \cdot 7200}{78{,}7} = 8{,}5 \cdot 10^6.$$

Далее

$$a = C_x \rho \frac{S}{2} = 0{,}05\ \frac{0{,}0927 \cdot 40}{2} = 0{,}0927,$$

$$J = \sqrt[3]{\frac{8{,}5 \cdot 10^6 \cdot 78{,}7 \cdot 7200^2}{0{,}0927}} = 725 \text{ км}, \quad L_{max} \leq 725 \text{ км}.$$

Видим, что наша оценка мало отличается от режима полета с постоянным положением сектором газа, т.е. указанный режим близок к оптимальному.

Пример 3.2. Дирижабль с поршневыми двигателями данными: $S_{мид} = 400 \text{ м}^2$, $C_x = 0{,}1$, $N = 11300$ л.с., $\eta = 0{,}75$, $C_e = 0{,}25 \frac{\text{кг}}{\text{л.с.час}}$, запас топлива $\Delta m = 576$, совершает полет на высоте $H = 3$ км ($\rho = 0{,}0927$). Найти оценку максимальной дальности.

Из условия $P = X$ найдем скорость полета

$$\frac{75 N \eta}{V} = C_x \rho \frac{V^2}{2} S, \quad V = \sqrt[3]{\frac{150 N \eta}{C_x \rho S}} = \sqrt[3]{\frac{150 \cdot 11300 \cdot 0{,}75}{0{,}1 \cdot 0{,}0927 \cdot 400}} = 70 \text{ м/сек}.$$

Время полета

$$\Delta t = \frac{\Delta m \cdot g}{N C_e} = \frac{576 \cdot 9{,}81}{11300 \cdot 0{,}25} = 2 \text{ часа}.$$

Т.е. дальность на выбранном режиме равна: $L = V \Delta t = 70 \cdot 2 \cdot 3600 = 504$ км.

Применим оценку (3.7), считая $t_2 - t_1 = \Delta t = 2$ часа:

$$a = C_x \rho \frac{S}{2} = 0{,}1\ \frac{0{,}0927 \cdot 400}{2} = 1{,}84, \quad b = \frac{75 N \eta \Delta t}{\Delta m} = \frac{75 \cdot 11300 \cdot 0{,}75 \cdot 7200}{576} = 7{,}95 \cdot 10^6,$$

$$J = \sqrt[3]{\frac{7{,}95 \cdot 10^6 \cdot 576 \cdot 7200^2}{1{,}84}} = 512 \text{ км}, \quad L_{max} \leq 512 \text{ км}.$$

Мы видим, что оценка дает хорошие результаты.

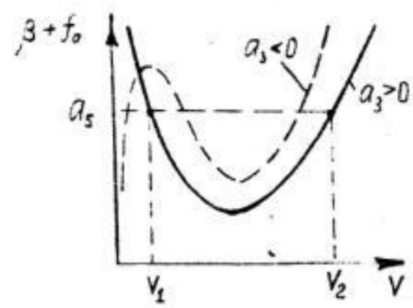
Основные результаты гл.9.

I. Рассмотрена задача о минимуме интегрального тепла при входе летательного аппарата в атмосферу пленеты. Для решения применены методы

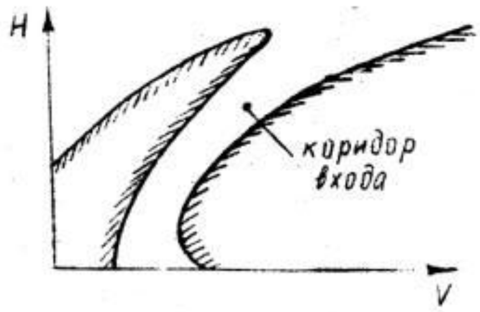
β- функционала. При помощи этих методов не интегрируя сложной нелинейной системы уравнений движения удалось построить "коридор входа", находясь внутри которого летательный аппарат получит тепла меньше известной величины.

2. Методом максимина построена оценка максимальной горизонтальной дальности полета ракеты или самолета с двигателем постоянной тяги. Как показывают примеры, эта оценка является довольно точной в большой диапазоне параметров летательных аппаратов.

3. Методом максимина построена оценка в задаче полета на максимальную дальность самолета (дирижабля) с двигателем постоянной мощности. Эта оценка также является близкой к точной нижней грани функционала при значительных колебаниях параметров объектов. Интересно, что эти оценки построены без интегрирования дифференциальных уравнений движения объектов.



Фиг. 9.1



Фиг. 9.2

Г Л А В А 10

Применение метода гл.2 к экстремальным задачам комбинаторного типа

1. Введение. Общая постановка экстремальной задачи комбинаторного типа.

1^0. Экстремальные задачи комбинаторного типа объединяют широкий круг очень важных задач прикладного характера. К ним, например, сводятся задачи теории расписаний, календарное планирование, целочисленное программирование, балансирование линий сборки, задача коммивояжера, размещение складов, заводов, задачи раскроя материалов и многие другие. Все они обладают общим свойством: это задачи поиска экстремума на некотором множестве комбинаций (сочетаний, перестановок, последовательностей и т.д.).

Эти задачи играют большую роль в авиационной технике и автоматике.

Например, задача выбора наивыгоднейшей комбинации из имеющихся двигателей, известных аэродинамических форм и типов вооружения при конструировании самолета данного назначения; задачи оптимального [redacted] проектирования автоматических устройств из набора элементов, деталей, узлов и агрегатов с известными характеристиками, задачи выбора технологического процесса изготовления или сборки из большого набора возможных операций и т.п.. До сих пор этим задачам уделялось мало внимания, хотя число их очень велико. Последнее обстоятельство связано главным образом с тем, что математический аппарат для решения подобных задач появился только в последние годы и развит крайне слабо.

2^0. Рассмотрим конечное множество X некоторых комбинаций π_i $(i=1,2,\dots,N)$. Примерами таких комбинаций могут быть перестановки из n элементов (число возможных комбинаций $N=n!$), сочетания из n элементов по m $(N=C_n^m)$, последовательности длины n, каждый член которых принимает одно из m значений ($N=m^n$) и т.д.Множество допустимых комбинаций может быть задано и более сложным образом. Например, последовательность длины $n\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (n - мерный вектор) такая, что x_i принимает одно из m возможных значений и $\varphi_j(x) \leq 0 \quad j=1,2,\dots,s$.

Пусть определена функция $f_0(\pi_i)$ на множестве X, т.е. существует алгоритм вычисления $f_0(\pi_i)$ для любой $\pi_i \in X$. При помощи каких-то условий выделены допустимые комбинации, множество которых $X^* \subset X$. Требуется определить $\pi_i \in X^*$, на котором $f_0(\pi_i)$ достигает минимума (максимума).

Решение этих задач чрезвычайно трудно [95].
Для ряда таких задач предложены алгоритмы (иногда эвристические) поиска лучшего решения по сравнению с исходным вариантом. Однако вопрос об оптимальности полученного решения часто остается открытым. Методы гл. I-II позволяют просто получить достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах, а иногда и подсказывает алгоритмы отыскания решения, удовлетворяющего этим условиям.

§ I. Задача о назначениях(проблема выбора)

I°. Имеется n механизмов (заводов, станков, людей и т.п.) каждый из которых может быть использован на одном из n видов работ (выпуске определенного вида продукции, обработки деталей, должностях и т.п.). Производительности их на каждой работе известны (заданы в виде квадратной матрицы порядка n). Требуется так распределить механизмы по одному на каждую из работ, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

В такой задаче $n!$ вариантов. Если $n=20$, то для быстродействующей ЭВМ, просчитывающей I вариант за I микросекунду потребовалось бы четверть миллиона лет для нахождения оптимального решения.

Математически задача описывается следующим образом. Найти минимум функции

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (I.I)$$

при условиях

1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j=1,2,\dots,n$,

2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i=1,2,\dots,n$, 3) $x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad i,j=1,2,\dots,n$. (I.2)

Первые два из них отражают тот факт, что на одну работу должен быть назначен один механизм (сумма элементов в строке и столбце матрицы равна 1), третье условие, что механизм по отношению к данной работе может находится только в одном из двух состояний: "назначен" - "не назначен".

Заметим, что в этой задаче не применим метод множителей Лагранжа, ибо переменные x_{ij} -дискретные и число связей (I.2) равное n^2+2n больше числа переменных n^2 .

2. Применим метод гл.2. Возьмем α - функционал в виде

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{j\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1\Big) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\nu_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} b_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 1\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}\big[x_{ij}(x_{ij}-1)\big], \qquad (I.3)$$

где $\lambda_j, \nu_i, \mu_{ij}, a_{j\kappa\alpha}, b_{i\kappa\alpha}$ - постоянные.

Составляем обобщенный функционал

$$\mathcal{I} = I + \alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{j\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1\Big) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\nu_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} b_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big)\cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 1\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}\big[x_{ij}(x_{ij}-1)\big]. \qquad (I.4)$$

Он является непрерывной и дифференцируемой функцией n^2 непрерывных переменных x_{ij} . Необходимое условие экстремума дает

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + \Big(\lambda_j + \sum_{\alpha}\sum_{\kappa} a_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big) + \sum_{\alpha} a_{\alpha ij}\Big(\sum_{\kappa} x_{\kappa\alpha} - 1\Big) + \Big(\nu_i + \sum_{\alpha}\sum_{\kappa} b_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big) + \sum_{\alpha} b_{\kappa ij}\Big(\sum_{\kappa} x_{\alpha\kappa} - 1\Big) + \mu_{ij}(2x_{ij} - 1) = 0$$

или с учетом связей (I.2)

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{ij}}\Big|_{\bar{x}} = c_{ij} + \lambda_j + \sum_{\alpha}\sum_{\kappa} a_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big|_{\bar{x}} + \nu_i + \sum_{\alpha}\sum_{\kappa} b_{i\kappa\alpha} x_{\kappa\alpha}\Big|_{\bar{x}} + \mu_{ij}(2x_{ij} - 1)\Big|_{\bar{x}} = 0 \qquad (1.5)$$

$$i,j = 1,2,\dots,n.$$

Вычисляя смешанные производные получим

$$N_{ijk\alpha}=\frac{\partial^2 J}{\partial x_{ij}\,\partial x_{k\alpha}}=a_{jk\alpha}+a_{\alpha ij}+b_{ik\alpha}+b_{kij}+K,$$

где

$$K=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq k \text{ или } j\neq\alpha,\\ 2\mu_{ij}, & \text{если } i=k \text{ и } j=\alpha.\end{cases}$$

Выражение (I.4) состоит из суммы линейной и квадратичной форм. Для того, чтобы точка $\bar{x}$ была единственной абсолютной минималью такого выражения достаточно, чтобы в этой точке $dJ=0$, $d^2J>0$. Первое требование эквивалентно n^2 равенствам (I.5), второе – тому, что квадратичная форма

$$N_{ijk\alpha}\,\delta x_{ij}\,\delta x_{k\alpha}>0 \qquad i,j,k,\alpha=1,2,\dots,n$$

должна быть положительно определенной. Напомним, что согласно критерия Сильвестра последнее условие равносильно следующему: миноры M_β, исходящие из левого верхнего угла определителя $|N_{ijk\alpha}|$ должны быть положительны, т.е.

$$M_\beta>0 \qquad \beta=1,2,\dots,n^2. \tag{I.6}$$

В частности, необходимо, чтобы все $N_{ijij}>0$. Выражения (I.5), (I.6) дают n^2 равенств и n^2 неравенств, связывающих числа λ,ν,a,b .

<u>Теорема I.I</u> Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ $(i,j=1,\dots,n)$ была единственной абсолютной минималью функционала (I.I) достаточно существования таких вектор-констант λ,ν,a,b , чтобы имели место равенства (I.5) и неравенства (I.6).

В самом деле из (I.5), (I.6) следует: $d\bar{J}=0$, $d^2\bar{J}>0$, т.е. точка $\bar{x}$ является точкой локального минимума. Но для функции вида (I.4) точка строгого локального минимума является точкой глобального минимума.

Положим все числа $a_{i\alpha k}=0$, ~~[illegible]~~ $b_{i\alpha k}=0$.

Тогда элементы определителя $|N_{ij\alpha k}|$, не стоящие на главной диагонали будут равны нулю. Неравенства (I.6) превратятся в неравенства $N_{ijij}>0$, т.е.

$$2(\cancel{\ldots}\,\mu_{ij})>0 \qquad i,j=1,\dots,n. \tag{I.7}$$

Подставляя сюда μ_{ij} из (I.5) и учитывая, что на допустимых согласно теории неравенств неравенства: $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>0$ и $\varphi_1(x)\varphi_2(x)>0$ - эквивалентны, получим n^2 неравенств:

$$(1-2x_{ij})(\lambda_j+\nu_i+c_{ij})>0 \quad i,j=1,2,\dots,n. \qquad (1.8)$$

Здесь не требуется выполнения n^2 неравенств /I.5/, ибо они всегда могут быть удовлетворены за счет n^2 величин μ_{ij}. Итак имеет место

Следствие I.I. Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ $(i,j=1,\dots,n)$ была единственой абсолютной минималью функционала /I.I/ достаточно существования решения у системы неравенств /I.8/ относительно неизвестных λ_j,ν_i $(i,j=1,\dots,n)$ на этой комбинаций $\bar{x}_{ij}$.

В этом случае проверка некоторой комбинации на абсолютный минимум сводится к решению n^2 неравенств /I.8/ с $2n$ неизвестными λ_i,ν_j. Если знак "$>$" в /I.6/-/I.8/ заменить знаком "$\geqslant$", то теорема I.I попрежнему будет давать достаточные условия абсолютного минимума, но утверждать единственность решения уже нельзя.

Метод обратной подстановки в данном случае состоит в следующем: задаёмся λ_j,ν_i и из /I.8/ находим комбинацию $\bar{x}_{ij}$. Если она допустимая /т.е. $\bar{\alpha}=0$/, то это абсолютная минималь функционала /I.I/, если нет, $\mathcal{I}(\bar{x})$ -есть оценка снизу функционала /I.I/. В последнем случае множество, содержащее абсолютную минималь: $M=\{x:\alpha\geqslant\bar{\alpha}\}$, а множество лучших решений: $N=\{x:2I+\alpha\leqslant 2\bar{I}+\bar{\alpha}\}$. Метод максимина будет состоять в таком выборе λ_i,ν_j, чтобы оценка $\mathcal{I}(\bar{x})$ -возростала.

3°. Рассмотрим теперь алгоритм поиска абсолютного минимума, который следует из /I.8/ и следствия I.I. Будем обозначать значения c_{ij} на $x_{ij}=1$ проверяемой допустимой комбинации x_{ij} как $\bar{c}_{ij}$. Тогда /I.8/ в развернутом виде запишутся

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1+\nu_1+c_{11}>0, & \lambda_1+\nu_2+c_{21}>0, & \dots\dots & \lambda_1+\nu_n+c_{n1}>0,\\
\lambda_2+\nu_1+c_{12}>0, & \lambda_2+\nu_2+c_{22}>0, & \dots\dots & \lambda_2+\nu_n+c_{n2}>0,\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
-\lambda_k-\nu_1-\bar{c}_{1k}>0, & -\lambda_\alpha-\nu_2-\bar{c}_{2\alpha}>0, & \dots\dots & -\lambda_\beta-\nu_n-\bar{c}_{n\beta}>0,\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{array} \qquad (1.9)$$

. . . .

$\lambda_n + \nu_1 + c_{1n} > 0, \quad \lambda_n + \nu_2 + c_{2n} > 0, \quad \dots \quad \lambda_n + \nu_n + c_{nn} > 0.$

Выберем некоторые $\bar{c}_{\alpha k}$ и $\bar{c}_{\beta j}$ $\alpha \neq \beta,\ k \neq j$ в (I.9). Сложим в столбце с номером α неравенство с номером k с неравенством j в этом же столбце и в столбце с номером β неравенство j с неравенством k, получим

$$\lambda_j - \lambda_k + c_{\alpha j} - \bar{c}_{\alpha k} > 0 \qquad \lambda_k - \lambda_j + c_{\beta k} - \bar{c}_{\beta j} > 0 \qquad \alpha \neq \beta,\ j \neq k. \tag{I.10}$$

Складывая эти два неравенства, найдем

$$c_{\alpha j} + c_{\beta k} - \bar{c}_{\alpha k} - \bar{c}_{\beta j} > 0 \qquad j \neq k,\ \ \alpha \neq \beta. \tag{I.11}$$

Мы видим, что неравенства типа (I.11) необходимы для существования решения у системы (I.8).

Выберем некоторые $\bar{c}_{\alpha k}$, $\bar{c}_{\beta j}$, $\bar{c}_{\gamma \xi}$, где индексы α, β, γ и k, j, ξ попарно не равны друг другу в каждой группе. Сложим в столбце с номером α неравенство с номером k, умноженное на два, с неравенствами j и ξ; в столбце с номером β, неравенство с номером j, умноженное на два, с неравенствами k и ξ и в столбце с номером γ неравенство ξ, умноженное на два, с неравенствами k и j, получим

$$-2\lambda_k + \lambda_j + \lambda_\xi - 2\bar{c}_{\alpha k} + c_{\alpha j} + c_{\alpha \xi} > 0, \quad -2\lambda_j + \lambda_k + \lambda_\xi - 2\bar{c}_{\beta j} + c_{\beta k} + c_{\beta \xi} > 0,$$
$$-2\lambda_\xi + \lambda_k + \lambda_j - 2\bar{c}_{\gamma \xi} + c_{\gamma k} + c_{\gamma j} > 0.$$

Складывая эти три неравенства, найдем

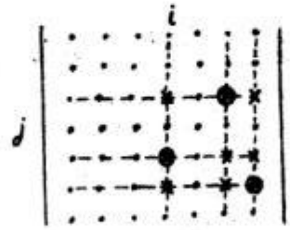
$$c_{\alpha j} + c_{\alpha \xi} + c_{\beta k} + c_{\beta \xi} + c_{\gamma k} + c_{\gamma j} - 2(\bar{c}_{\alpha k} + \bar{c}_{\beta j} + \bar{c}_{\gamma \xi}) > 0. \tag{I.12}$$

Эти неравенства также необходимы для существования решения у системы (I.8).

Выбирая m ($m \leq n$) некоторых $\bar{c}_{ij}$, нетрудно построить необходимые условия существования решения системы (I.8) в виде следующих неравенств

$$\sum c_{ij} - (m-1) \sum \bar{c}_{k\beta} > 0 \qquad m = 2, 3, \dots, n. \tag{I.13}$$

Эти условия просто составлять, если иметь перед глазами матрицу коэффициентов $\|c_{ij}\|$ с отмеченной на ней выбранной допустимой комбинацией $\bar{c}_{ij}$. Выберем, например, m – величин $\bar{c}_{ij}$. На схеме они отмечены знаком ⊗.



Пересечения строк и столбцов в которых стоят выбранные $\bar{c}_{ij}$ образуют минор порядка m. Тогда, чтобы получить выражение типа (I.I3) достаточно сложить между собой $\bar{c}_{ij}$ (отмеченные на схеме •) умножить полученную сумму на $(m-1)$, сложить между собой все остальные элементы минора c_{ij}, стоящие в узлах соответствующих строк и столбцов (отмечены на схеме значком ×) и вычесть из 2-ой суммы первую. Мы и получим выражение слева в (I.I3).

Так, если $m=2$, то число возможных неравенств (I.II) равно числу сочетаний $C_n^2 = \frac{1}{2!}n(n-1)$. Если $m=3$, то число возможных неравенств типа (I.I2) равно $C_n^3 = \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$ и т.д. Используя известное выражение для суммы биномиальных коэффициентов: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$, найдем общее число неравенств типа (I.I3), когда m пробегает значения от 2 до n:

$$N = C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n - (n+1)\,. \qquad \text{(I.I4)}$$

Это число растет довольно быстро и всегда превышает максимальное число независимых неравенств, которое получится, если из (I.9) исключить переменные λ, ν. Последнее равно n^2-2n. Самые простые неравенства (I.I3), когда $m=2$ или $m=n$. Несколько сложнее для проверки неравенства (I.I3) при $m=3$. Соотношение между количеством неравенств видно из таблицы I.I:

Таблица I.I.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
n^2-2n	0	2	8	I5	24	35	48	63	80
C_n^2 $(m=2)$	I	3	6	I0	I5	2I	28	36	45
C_n^3 $(m=3)$		I	4	I0	20	35	56	84	I80
N	I	4	II	26	57	I20	247	502	I0I3

Выберем из N неравенств (I.I3) n^2-2n неравенств простейшего типа с $m=2$ и $m=3$. Вообще говоря, если миноры определителя матрицы $\|C_{ij}\|$ неособые эти неравенства независимы между собой и выполнение их говорит о существовании решения системы[I)] (I.9). Таким проверка неравенств (I.I3) подсказывает следующий алгоритм поиска оптимального решения поставленной задачи.

Выбираем некоторый коэффициент $\bar{c}_{1j}$ в первой строке матрицы $\|\bar{c}_{ij}\|$ и начинаем проверять неравенства типа (I.II) относительно второй строки[2)]. Если (I.II) невыполнено, то надо выбрать другой элемент $\bar{c}_{1j}$ и все начать сначала. Если (I.II) выполнено, то переходим ко второй строке и т.д. пока не дойдем до последней строки. Затем выбираем элемент $\bar{c}_{2k}$ $k \neq j$ во второй строке, проверяем неравенства (I.II) относительно 2-ой, 3-ей и т.д. строк. В случае невыполнения (I.II) $\bar{c}_{2k}$ заменяем, в случае выполнения- переходим к 3-ей строке и т.д.пока не найдем $\bar{c}_{ij}$ в каждой строке.

Такой процедурой выделяется допустимое решение, подозрительное на экстремум. Для того, чтобы убедится в его оптимальности надо либо на заданных $\bar{c}_{ij}$ найти какое-нибудь решение системы (I.9) либо проверить недостающие неравенства (I.I3), либо сравнить с оценкой снизу (см.далее).

Для того, чтобы сократить число вычислений можно пользоваться следующим эвристическим приемом: в каждой строке выбирается наименьший допустимый коэффициент. Если он не подходит, то выбирается следующий наименьший по величине коэффициент и т.д..

I) При получении неравенств (I.I3) из (I.8) мы пользовались только эквивалентными преобразованиями.

2) Если решение неединственное знак " > " в (I.II) следует заменить знаком " ≥ ".

Пример 1.1. Предложенным алгоритмом решен нижеследующий пример с матрицей шестого порядка. Решение подозрительное на экстремум и найденное ~~[illegible]~~ путем проверки только простейших неравенств, обведено кружками. Искался максимум поэтому все c_{ij} должны изменить знак на противоположный. Нетрудно убедится, что выделение решения подозрительного на экстремум (проверка неравенств (I.II)) занимает I–2 мин.

1	2	0	1	3	1
0	1	1	0	2	0
5	1	1	1	0	1
0	0	2	1	0	1
3	2	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

(I.I5)

Мы рассмотрели случай квадратной матрицы $n\times n$. Если матрица имеет размерность $n\times m$, то надо добавить нулевые столбцы (или строки) в матрицу $\|c_{ij}\|$ и сделать ее квадратной. Если некоторые клетки запрещены для назначения, в них надо положить $c_{ij}=\infty$.

В заключение заметим, что хотя неравенства (I.9) частично совпадают с неравенствами в двойственной задаче к проблеме назначения эти задачи не идентичны. В двойственной задаче [97] требуется максимизировать (в наших обозначениях) функционал.

$$I=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{j=1}^{n}\nu_j$$

при условиях

$$c_{ij}+\lambda_i+\lambda_j\geq 0 \qquad i,j=1,\dots,n.$$

У нас же требуется доказать на выбранном допустимом решении $\bar{c}_{ij}$ существование хотя бы одного решения системы неравенств (I.9). Эта система не совпадает полностью с системой неравенств в двойственной задаче, ибо там [97] требуется, чтобы $\bar{c}_{jk}+\lambda_j+\nu_k=0$ в то время как в (I.9) $-\lambda_j-\nu_k-\bar{c}_{jk}>0$. Однако, повидимому, условия двойственной задачи могут быть получены как частный случай из (I.9), если знак " > " в (I.9) заменить знаком " ≥ " (отказаться от условий единственности решения) и потрёбовать дополнительно, чтобы на оптимальной комбинации при $x_{ij}>0$ имели место равентсва $-\lambda_j-\nu_k-\bar{c}_{jk}=0$.

В данной задаче можно получить оценки снизу величины функционала. В самом деле, если в неравенствах (I.8) задаться λ, ν и решить их относительно x_{ij}, то вообще говоря, полученная при этом комбинация $\tilde{x}_{ij}$ не будет допустимой [1]. Но тогда (см. теор. 14 гл. 2) $I(\tilde{x}_{ij})\leq$ $\leq I(x^*_{ij})$, т.е. $I(\tilde{x}_{ij})$ - есть оценка снизу величины абсолютного минимума.

Задаваясь разными λ_i, ν_j, сразу получаем из (I.8) $\tilde{x}_{ij}$ и подсчитывая $I(\tilde{x}_{ij})$ находим оценку. Так в примере (I.I5) задаваясь $\lambda=(3, 2, 5, 2, 3, 1,)$, $\nu=(0,0,0,0,0,0)$ получаем из (I.8) комбинацию [2] $\tilde{x}=(\tilde{x}_{51}, \tilde{x}_{52}, \tilde{x}_{18}, \tilde{x}_{44}, \tilde{x}_{65}, \tilde{x}_{66})$, на которой $I(\tilde{x})=16$. Задаваясь $\lambda=(0,0,0,0,0,0)$, $\nu=(5,2,2,1,3,1)$ получаем комбинацию $\tilde{x}=(\tilde{x}_{18}, \tilde{x}_{25}, \tilde{x}_{33}, \tilde{x}_{44}, \tilde{x}_{57}, \tilde{x}_{65})$, на которой $I(\tilde{x})=14$. Полученное ранее нами максимальное значение на допустимой комбинации $I(\bar{x})=13$.

Аналогичным методом ~~можно~~ получить условия абсолютного минимума и оценки в ряде других задач комбинаторики.

§ 2. Задача целочисленного программирования

I$^{\circ}$. Постановка задачи [95]. Требуется минимизировать форму

$$I=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.I}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leq b_i \quad i=1,\dots,m, \quad x_j=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}; \quad j=1,\dots,n. \tag{2.2.}$$

2°. Решение задачи. Запишем I-е ограничения в (2.2) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+z_i^2-b_i=0 \qquad i=1,\dots,n, \tag{2.3}$$

---

1) Если она допустима то это абсолютная минималь задачи I.

2) При проверке неравенств у всех c_{ij} в (I.I5) надо изменить знак, ибо мы ищем максимум I (I.I).

где z_i дополнительные переменные.

Согласно метода гл.2 будем искать α - функционал в виде

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i^2 - b_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} [x_j (x_j - 1)]. \qquad (2.4)$$

Составляем обобщенный функционал

$$J = I + \alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i^2 - b_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j [x_j (x_j - 1)]. \qquad (2.5)$$

Здесь λ_i, μ_j некоторые постоянные. Переменные x_j в (2.5) уже непрерывны. Вычислим первые производные, имеем

$$\partial J / \partial x_j = c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i + \mu_j (2 x_j - 1) = 0 \qquad j = 1, \dots, n, \qquad (2.6)$$

$$\partial J / \partial z_i = 2 \lambda_i z_i = 0 \qquad i = 1, \dots, m. \qquad (2.7)$$

Таким образом, если на проверяемом допустимом решении имеет место строгое неравенство (2.2), то $z_i \neq 0$ и из (2.7) имеем $\lambda_i = 0$. Рассуждениями аналогичными задаче §I можно показать, что для $d^2 J \geq 0$ достаточно, чтобы

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_j^2} = (1 - 2x_j)(c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z_i^2} = 2 \lambda_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m. \qquad (2.9)$$

Выполнения же условий $dJ = 0$, $d^2 J \geq 0$ на допустимой комбинации в линейной задаче достаточно, чтобы проверяемое решение было абсолютной минималью (возможно не единственной). Таким образом доказана

<u>Теорема 2.I.</u> Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_i$ $i = 1, \dots, n)$ была абсолютной минималью функционала (2.I) при ограничениях (2.2) достаточно существования таких постоянных λ_i, чтобы на этой комбинации имели место неравенства (2.8),(2.9), а λ_i соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j < b_i$, были равны нулю.

Из условий теоремы вытекает, в частности, следующий алгоритм поиска оптимального решения: задаемся в (2.8) λ_i, удовлетворяющими (2.9). Из (2.8) находим $\tilde{x}_j = \{0,1\}$, удовлетворяющие неравенствам (2.8). Если найденные $\tilde{x}_j$, удовлетворяют условиям (2.2) а λ_i, соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j < b_i$, равны нулю, то найденное решение является оптимальным, если нет, то получаем оценку снизу величины функционала.

Пример 2.I Найти минимум

$$I = x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad (2.10)$$

при условиях

$$x_1 + x_2 \leq 1\,, \qquad x_1 + 2x_3 \leq 0. \qquad (2.11)$$

Составляем систему (2.8)

$$\begin{aligned} &(1-2x_1)(1+\lambda_1+\lambda_2) \geq 0\,,\\ &(1-2x_2)(2+\lambda_1+0) \geq 0,\\ &(1-2x_3)(1+0+2\lambda_2) \geq 0. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Задаемся $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.Подставляя их в (2.I2) видим, для того, чтобы имели место неравенства (2.I2) необходимо, чтобы $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.Эти значения удовлетворяют (2.II), следовательно согласно теоремы 2.I полученное решение оптимально.

Замечание 2.I Если некоторые выражения (2.2) имеют вид: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, то повторяя рассуждения нетрудно установить, что в этом случае соответствующие ограничения (2.9) снимаются.

§ 3. Задача коммивояжера

Коммивояжер должен посетить n городов. Предполагается, что на перезд из города i в город j затрачивается t_{ij} единиц времени. Перед коммивояжером, который находится в одном из пунктов i стоит задача объехать все пункты, побывав в каждом ровно один раз, вернуться в исходный пункт и затратить на это минимально возможное время[I].

Это типичная экстремальная задача комбинаторики с числом вариантов равным $(n-1)!$. К этой задаче сводяться многие важные задачи: например, задача переналадки оборудования, если t_{ij} трактовать как время, необходимое для переналадки оборудования

I) Если под t_{ij} понимать стоимость переезда из города i в город j, то функционалом может быть минимальная стоимость поездки.

между i-й и j-й операциями, а также задачи, связанные с планированием производства, минимизацией програмы, монтажем электроаппаратуры и др.

Математическое описание задачи [98] стр.344. Требуется минимизировать функционал

$$I=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \qquad (3.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n} x_{ij}=1 \quad i=1,\dots,n, \quad \sum_{i=1,\,i\neq j}^{n} x_{ij}=1 \quad j=1,2,\dots,n, \quad x_{ij}=\{0,1\}. \qquad (3.2)$$

Условия замкнутости контура: должны существовать числа u_i, такие, что

$$u_j-u_i+(n-1)x_{ij}-(n-2)\le 0 \quad i,j=1,\dots,n-1, \quad i\neq j, \quad u_i=\{0,1\}. \qquad (3.3)$$

Применяем метод гл.2. Составляем обобщенный функционал

$$\mathcal{J}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}x_{ij}-1\Big)+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_{ij}-1\Big)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}[x_{ij}(x_{ij}-1)]+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}K_{ij}[u_j-u_i+(n-1)x_{ij}-(n-2)+z_{ij}^2]+\sum_{i=1}^{n-1}\ell_i[u_i(u_i-1)]. \qquad (3.4)$$

Здесь $\lambda_j, \nu_i, \mu_{ij}, K_{ij}, \ell_i$ – некоторые постоянные, z_{ij} – дополнительные переменные. Величины x_{ij}, u_i в (3.4) уже можно рассматривать как не связанные между собой и непрерывные независимые переменные. Вычисляем первые частные производные:

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_{ij}}=t_{ij}+\lambda_j+\nu_i+\mu_{ij}(2x_{ij}-1)+K_{ij}(n-1)=0, \quad i\neq j, \quad i\neq n. \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_{nj}}=t_{nj}+\lambda_j+\nu_n+\mu_{nj}(2x_{nj}-1)=0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial u_j}=\sum_{i=1,\,i\neq j}^{j-1}K_{ij}-\sum_{\kappa=1,\,\kappa\neq j}^{n-1}K_{i\kappa}+\ell_i(2u_i-1)=0, \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial z_{ij}}=2K_{ij}z_{ij}=0. \qquad (3.8)$$

Из последнего равенства следует, что если $z_{ij}\neq 0$, то $K_{ij}=0$.

Вычисляя вторые производные, получим

$$\frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial x_{ij}^2}=2\mu_{ij}\ge 0 \quad i,j=1,\dots,n, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial u_i^2}=2\ell_i\ge 0 \quad i=1,\dots,n-1, \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial z_i^2}=2K_{ij}\ge 0 \quad i,j=1,\dots,n-1. \qquad (3.10)$$

Подставляя μ_{ij}, ℓ_i из (3.5) – (3.7) в (3.8), (3.9), получим

$$(1-2x_{ij})[t_{ij}+\lambda_j+\nu_i+K_{ij}(n-1)]\ge 0 \quad i\neq j, \; i\neq n.$$

$$(1-2x_{nj})[t_{nj}+\lambda_j+\nu_n]\ge 0, \qquad (3.11)$$

$$(1-2u_i)\Big[\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n-1}K_{ij}-\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq j}}^{n-1}K_{i\alpha}\Big]\ge 0.$$

Нетрудно убедится, что выполнения (3.5)- (3.8) достаточно, чтобы $d\bar{J}=0$, выполнения (3.9),(3.10),-чтобы $d^2\bar{J}\geq 0$.Т.к. функционал (3.4) состоит из суммы квадратичных и линейных членов, то очевидно,что выполнения $d\bar{J}=0$, $d^2\bar{J}\geq 0$ на некоторой допустимой комбинации достаточно, чтобы эта комбинация была абсолютной минималью. С учетом следствия 1. гл.2 это равносильно следующей теореме:

Теорема 3.I. Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ $i,j=1,\dots,n$ была абсолютной минимальюю функционала (3.I) при ограничениях (3.2),(3.3), достаточно существования таких постоянных $\lambda_j, \nu_i, \kappa_{ij}, u_i$ чтобы на этой комбинации имели место неравенства (3.II), $\bar{u}_i$ удовлетворяли (3.3), а κ_{ij} , соответствующие строгому неравенству в (3.3), были равны нулю.

Здесь можно предложить алгоритм, отыскания оптимального решения аналогичный § 2, т.е. задаемся некоторыми значениями λ, ν, κ. Тогда неравенства (3.I1) автоматически определяют комбинацию x_{ij}, u_i.Если эта комбинация удовлетворяет ограничениям (3.I),(3.2), т.е. является допустимой и для значений лежащих внутри границ (3.3) соответствующие $\kappa_{ij}=0$, то полученная комбинация является оптимальной. Если в (3.I1) неравенства строгие, то к тому же решение еще и единственное. Если же решение не является допустимым, то получаем оценку снизу.

§ 4. Задача целочисленного квадратичного программирования

Требуется найти минимум функционала

$$I=\sum_{j=1}^{n}(t_j x_j^2+c_j x_j) \tag{4.I}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad i=1,\dots,m, \quad x_j=\{0,1\}. \tag{4.2}$$

Составляем обобщенный функционал

$$J=\sum_{j=1}^{n}(t_j x_j^2+c_j x_j)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+z_i^2-b_i\Big)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j[x_j(x_j-1)]. \tag{4.3}$$

Здесь λ_i, μ_j - некоторые постоянные, z_i - дополнительные переменные. Вычисляя первые и вторые производные, найдем

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_j} = 2t_j x_j + c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_j + \mu_j(2x_j - 1) = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z_i} = 2\lambda_i z_i = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial x_j^2} = 2(t_j + \mu_j) \geq 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial z_i^2} = 2\lambda_i \geq 0. \tag{4.7}$$

Из (4.5) следует, что когда $z_i \neq 0$, то $\lambda_i = 0$.

Подставляя μ_j из (4.4) в неравенство (4.6) найдем

$$t_j + (1-2x_j)(2t_j x_j + c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i) \geq 0 \quad j = 1,\dots,n. \tag{4.8}$$

или $$t_j[1 + (1-2x_j)2x_j] + (1-2x_j)(c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i) \geq 0. \tag{4.9}$$

Повторяя рассуждения предыдущих параграфов нетрудно установить, что имеет место

Теорема 4.I Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_j$ $j = 1,\dots,n$ была абсолютной минималью функционала (4.I) при ограничениях (4.2) достаточно существование таких чисел $\lambda_i \geq 0$, чтобы на этой комбинации имели место неравенства (4.8), а λ_i, соответствующие строгим неравенствам в (4.2) были равны нулю.

Если имеют место строгие неравенства (4.8), то решение к тому же является и единственным.

Здесь также можно предложить алгоритм, аналогичный предыдущим параграфам: задаемся $\lambda_i \geq 0$, из (4.8) или (4.9) находим соответствующие x_j и если они являются допустимыми, т.е. удовлетворяют ограничениям (4.2), а соответствующие строгим неравенствам в (4.2) $\lambda_i = 0$, то это решение является оптимальным. Если же полученное решение не является допустимым, то это решение дает оценку снизу абсолютного минимума.

Пример. Найти минимум функционала

$$I = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 \tag{4.I0}$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \quad x_2 + x_3 \leq 0, \quad x_1 = \{0,1\}, \; x_2 = \{0,1\}, \; x_3 = \{0,1\}. \tag{4.II}$$

Составляем систему неравенств (4.8)

$$1+(1-2x_1)2x_1+(1-2x_1)(2+\lambda_1)\geq 0,$$
$$1+(1-2x_2)2x_2+(1+2x_2)(\lambda_1+\lambda_2)\geq 0,$$
$$1+(1+2x_3)2x_3+(1-2x_3)(\lambda_1+\lambda_2)\geq 0. \qquad (4.12)$$

Возьмем $\lambda_1=\lambda_2=0$, тогда из (4.12) следует, что $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$. Эти значения удовлетворяют ограничениям (4.11). Т.к. $\partial_1=\partial_2=0$, то $\lambda_1=\lambda_2=0$ также выполнено. Следовательно, полученное решение - оптимально.

Предлагаемый подход, является простым средством для получения формулировок двойственных задач, если α брать в простейшем виде $\alpha=\lambda_i F_i(x)$, где λ_i - постоянные, а $F_i(x)=0$ $i=1,\dots,m$ - связи. В отличие от метода Лагранжа он не требует, чтобы число связей m было меньше числа переменных n.

Основные результаты гл.10

1. Показано, что методы α - функционала с успехом могут быть применены в экстремальных задачах комбинаторики. Получены достаточные условия абсолютного минимума в ряде таких задач: задача о назначениях (проблема выбора), задача целочисленного программирования, задача коммивояжера, задача целочисленного квадратичного программирования.

2. В задаче о назначениях предложен алгоритм отыскания оптимального решения.

3. Во всех задачах получены оценки снизу для абсолютного минимума.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

I. Предлагается наряду с традиционной постановкой зада[illegible] [illegible]кание минимали) отыскивать более узкое множество заведомо содержащее абсолютную минималь и множество содержащее лучшие решения (а также оценки снизу).

Показано, что из решения некоторой другой задачи с более простым функционалом (задачи 2) можно извлекать информацию в приведенном выше смысле о исходной задаче I. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы и оценки, доказаны ~~[illegible]~~ достаточные условия эквивалентности задач I и 2.

Предложены три новых алгоритма решения поставленных задач (методы β - функционала): I. Метод выделения подмножества содержащего абсолютную минималь или лучшие решения, 2. Метод спуска по множеству лучших решений, 3. Метод совмещения экстремумов. При этом в ряде задач не требуется дифференцируемости и непрерывности функционала и связей.

2. Рассмотрен частный случай β - функционала α - функционал. Показано, что из решения задачи 2 (на множестве более простой структуры) можно получить либо минималь задачи I, либо оценку снизу и извлечь информацию о множестве, содержащем абсолютную минималь и лучшие решения. Показано, что существует бесконечное число α - функционалов и предложены ряд алгоритмов α - функционала для решения поставленных задач, в частности, алгоритм № 4.

Показано, что α - функционалы можно построить не только для известных форм связей задаваемых в виде уравнений, но и для функционалов связанных логическими условиями (двойная импликация, дизъюнкция, конъюнкция, отрицание). Показано, что метод "штрафа" может быть получен при специальном задании α - функционала. Предложен новый метод обратной подстановки, а метод совмещения экстремумов распространен на случай условного минимума.[I)]

I) Все они относятся к группе методов α - функционала.

3. Предложен метод максимина. Этот метод является весьма общим и дает необходимые и достаточные условия абсолютного минимума. Из него могут быть получены как группа методов α - функционала так и алгоритмы, совпадающие с известными алгоритмами решения оптимальных задач. Он дает и ряд новых алгоритмов (№ 5, № 5', № 5'') и два метода максимина с условием (относительно основного и вспомогательного неизвестного). Метод максимина распространен и на β - функционал с ограничениями типа равенств и неравенств. Показано, как можно получить для конкретных задач уравнения максимина, уравнения условного максимина относительно основного и вспомогательного неизвестного, а также уравнения максимина в частных производных. Показано, что полученные уравнения не являются уравнениями Эйлера-Лагранжа или уравнениями принципа максимума Л.С.Понтрягина и в отличие от них выделяют не решение подозрительное на экстремум, а абсолютную минималь. Уравнение же Беллмана следует как частный случай из уравнения максимина в частных производных.

Показано, что метод максимина может быть применен для оценки решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений для данной совокупности начальных условий, причем иногда такую оценку можно получить не интегрируя системы. Другое его применение - в исследовании устойчивости и в выделении функции Ляпунова из семейства возможных функций.

4. Разработаны новые численные алгоритмы реализации ряда предложенных методов на ЭВМ для задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (в частности метода максимина). Эти алгоритмы перед всеми существующими алгоритмами обладают следующими преимуществами: ликвидируют краевую задачу, дают сильный относительный минимум, позволяют точно учитывать ограничения на фазовые координаты и управления, не боятся вырожденных решений. Предложен новый метод спуска по допустимому множеству в задачах поиска минимума функций конечного числа переменных.

5. Поставлена задача оптимизации для случая фиксированных, "плавающих" и "распределенных" импульсов. Для её решения применен один из

методов α - функционала. Разработаны соответствующие алгоритмы отыскания импульсных минималей. Доказано, что при определенных условиях участки минималей между точками разрыва не зависят от граничных условий и абсолютная минималь находится среди минималей с импульсами.

6. Методы гл.2 применены для анализа особых (специальных) экстремалей. Получены новые необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа равенств и неравенств, доказаны теоремы о порядке вырождения особых экстремалей, теоремы об условиях входа и схода. Показано, что особые экстремали с порядком сложности два в достаточно малой окрестности особой экстремали будут иметь осциллирующий вход и сход. Показано, что при прочих равных условиях абсолютная минималь может содержаться среди особых минималей, а потому в технических задачах нельзя пренебрегать особыми минималями. Проделан в общем случае синтез ряда довольно общих систем 2-го и 3-го порядков, содержащих специальные экстремали.

7. Рассмотрены трудности в решении краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. На простых примерах показано, что оставаясь в рамках прежних методов, многие краевые задачи решить невозможно. Показано, что включение в состав экстремалей особых, импульсных и скользящих режимов позволяет избежать многих трудностей в решении краевых задач. Предложены методы преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки" и удаления сопряженных точек.

8. Предложенные методы применены к решению ряда задач автоматики, в частности, решены задачи: минимизации энергии сигнала и задача линейная относительно фазовых координат и нелинейная относительно управлений. Получилось, что при применении метода максимина для получения полного синтеза управления необходимо проинтегрировать линейную систему порядка n, в то время как для решения этой задачи другими известными методами пришлось бы интегрировать систему порядка $2n$ бесконечное число раз.

Показано как можно получить множество лучших решений в задачах с неаналитическими (не дифференцируемыми и разрывными) функционалами. В частности, в задаче о точном регулировании, в задаче о минимуме расхода топлива, в приближенной задаче о минимуме максимального отклонения некоторой координаты.

Проанализированы особые решения в задаче аналитического конструирования многосвязных оптимальных регуляторов (без управлений в функционале). Получено, что в окрестности начала координат фазового пространства существует особая экстремаль с порядком особенности равным числу управлений и существует окрестность в которой регулятор устойчив. Найден оптимальный закон регулирования. Установлено, что по особому решению можно идти и в скользящем режиме.

Решена задача построения предельного цикла или задача стабилизации колебаний в линейной системе. Найдены особые, скользящие режимы и закон оптимального управления в этой задаче.

9. Решены ряд задач динамики полета. В частности, рассмотрена задача о минимуме интегрального тепла при входе летательного аппарата в атмосферу планеты. При помощи методов β - функционала не интегрируя сложной нелинейной системы уравнений движения удалось построить "коридор входа" находясь внутри которого летательный аппарат получит тепла меньше известной величины.

Методом максимина построены простые оценки максимальной дальности полета ракеты или самолета с двигателем постоянной тяги, самолета (дирижабля) с двигателем постоянной мощности. Решены и некоторые другие задачи, например, задача об оптимальном старте самолета вертикального взлета, о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза и др.

10. Показано, что методы α - функционала с успехом могут быть применены в экстремальных задачах комбинаторики. Получены достаточные условия абсолютного минимума и оценки в ряде таких задач: задача о назначениях (проблема выбора), задача целочисленного программирования, задача коммивояжера и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болонкин А.А., Метод решения оптимальных задач. Сб. Сложные системы управления, Киев, Наукова Думка, 1965 г., стр. 34-67.
2. Болонкин А.А., О разрешимости краевых задач оптимального управления, Труды академии им. Н.Е. Жуковского, вып. 1131, 1966, стр. 103-128.
3. Болонкин А.А., Достаточные условия в разрывных вариационных задачах с ограниченным управлением. Приложение к статье "Оптимизация траекторий многоступенчатых летательных аппаратов", в сб. "Исследования на динамике полета", Машиностроение, 1965 г., стр. 44-78.
4. Болонкин А.А., О решении общей задачи линейного оптимального быстродействия с одним управлением. Прикладная механика, т. 4, вып. 4, 1968 г. стр. 111-121[1)]
5. Болонкин А.А., Оптимизация параметров в вариационных задачах, ДАН УССР, № 5, 1964 г.
6. Болонкин А.А., Особые, скользящие и импульсные режимы в задачах динамики полета, Сб. "Сложные системы управления", Киев, Наукова Думка, 1965 г., стр. 68-90.
7. Болонкин А.А., Принцип расширения и условия Якоби вариационного исчисления, ДАН УССР, № 7, 1964.
8. Болонкин А.А., Оптимизация траекторий многоступенчатых летательных аппаратов. Сб."Исследования по динамике полета", Москва, 1965 г., стр. 20-43.
9. Болонкин А.А., Вариационное исчисление и функциональное уравнение Беллмана, ДАН УССР, № 10, 1964 г.
10. Болонкин А.А., Исследование динамики старта самолета с вертикальным взлетом. Сб. "Исследования по динамике полета", Машиностроение, 1965 г. стр. 119-147.

---

1) Получена редакцией 18.4.66 г.

11. Болонкин А.А., Метод оценки эффективности управления пограничным слоем на самолете. Труды КВИАВУ вып. 72, 1960 г.
12. Болонкин А.А., Теория полета аппаратов с управляемой радиальной силой. Сб. "Исследования по динамике полета", Москва, 1965 г., стр. 79-118.
13. Болонкин А.А., Специальные экстремали в задачах оптимального управления. Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967г.
14. Болонкин А.А., Исследование движения самолета АН-12 на разбеге. Отчет ОКБ п/я 4, 1959 г.
15. Болонкин А.А., Исследование по выбору оптимальных параметров самолета с вертикальным взлетом и посадкой, Отчет ОКБ п/я 4, 1959 г.
16. Болонкин А.А., Исследования по выбору оптимальных параметров высотного самолета. Отчет ОКБ п/я 4, 1958 г.
17. Болонкин А.А., Расчет летных данных самолетов высокой тяговооруженности с нестационарной полярой. Отчет ОКБ п/я 4, 1958 г.
18. Болонкин А.А., Оптимизация траекторий. Отчет МАИ, каф. 109, 1962.
19. Болонкин А.А., Некоторые вопросы исследования траекторий летательных аппаратов. МАИ, Отчет по теме 0411, 1963 г.
20. Болонкин А.А., Приближенный метод решения задач оптимального управления. Отчет МАИ по теме 0411, 1964.
21. Болонкин А.А. Специальные экстремали. МАТИ, Отчет, 1967 г.
22. Болонкин А.А., Особые решения в задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов. МАТИ, Отчет, 1967 г.
23. Болонкин А.А., Геворкян А.М., Подлипаев Л.Д., Метод интегрированной обработки документации. МАТИ, Отчет по теме , 1968 г.
24. Блисс Г.А., Лекции по вариационному исчислению, И.Л., 1950 г.
25. Эльсгольц Л.Э., Вариационное исчисление, ГИТТЛ, 1952 г.
26. Лаврентьев М. и Люстерник Л., Основы вариационного исчисления. ОНТИ, т. 1 и II, 1935 г.
27. Гельфанд И.М. и Фомин С.В., Вариационное исчисление, ФМ, 1960 г.

28. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Д., Математическая теория оптимальных процессов, ФМ, 1961.

29. Болтянский В.Г., Математические методы оптимального управления, ФМ, 1966 г.

30. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960 г.

31. Кротов В.Ф., Методы решения оптимальных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, Автоматика и телемеханика, ч.1 № 12 (1962), ч. П, № 5 (1963), ч. Ш, № 7 (1964).

32. Кротов В.Ф., Разрывные решения вариационных задач, ИВУЗ сер. Математика № 5, 1960 г.

33. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа, ФМ, 1965 г.

34. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, Мир, 1964 г.

35. Вайнберг М.М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Москва, 1956 г.

36. Егоров Ю.В., Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах. Матем. сборник, т. 64, № 1, 1964.

37. Бутковский А.Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Наука, 1965 г.

38. Методы оптимизации с приложениями к механике полета. Сб. под ред. Дж. Лейтмана, ФМ, 1965.

39. Моисеев Н.Н., Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. ЖВМ и МФ, № 3 (1964), № 1 (1965).

40. Кротов В.Ф., Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем. ДАН СССР, т. 172, № 1-3, 1967, стр. 18-21.

41. Пропой А.И., О принципе максимума для дискретных систем управления. Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.

42. Гамкрелидзе Р.В., О скользящих оптимальных режимах, ДАН СССР, т. 143, № 6, 1962.

43. Келли , Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на 2-ой вариации. Астронавтика и ракетная техника, № 8, 1964.

44. Копп и Мойер, Необходимые условия оптимальности особых экстремалей, Астронавтика и ракетная техника, № 8, 1965.

45. Вапнярский И.В., Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов. ЖВМ и МФ, № 2 (март-апрель), 1967 г.

46. Вапнярский И.В., Письмо в редакцию, ЖВМ и МФ, № 2, 1968 г.

47. Гурман В.И., Об оптимальных процессах особого управления, АиТ, № 5, 1965.

48. Гурман В.И., Метод кратных максимумов. АиТ, № , 1966 г.

49. Филиппов А.Ф., О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, № 2, 1959.

50. Загускин В.Л., Справочник по численным методам решения уравнений.

51. Летов А.И., Аналитическое конструирование регуляторов, АиТ № 4-6, (1960), № 4 (1961), № 11 (1962).

52. Джонсон, О задаче Летова в теории оптимального управления. Журн. Теоретические основы инжен. расчетов, Сер. Д, № 1, 1965.

53. Лурье А.И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1951.

54. Матвеев Н.М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Изд-во "Высшая школа", 1963 г.

55. Фельдбаум А.А., Основы теории оптимальных автоматических систем, ФМ, 1966 г.

56. Фельдбаум А.А., О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, АиТ, т. 16, № 2, 1955.

57. Остославский И.В., Аэродинамика самолета, Оборонгиз, 1957 г.

58. Троицкий В.А., Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями" ПММ т. 26, вып.2, 1962.

59. Шатровский Л.И., Об одном численном методе решения задач оптимального управления, ЖВМ и МФ, т. 2, № 3, 1962.

60. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, Журн. "Успехи физич.наук", т. 63, № 1а, 1957 г.

61. Горощенко Б.Т., Динамика полета, самолета, Оборонгиз, 1954 г.

62. Лысенко Н.М., Тарасенков А.М., Брага В.Г., Основы динамики полета, Москва, 1962.

63. Космодемьянский А.А., Механика тел переменной массы, Москва, 1948 г.

64. Зенкин А.И., Труды академии И.Е. Жуковского, вып. № 843, 987, 1962 г.

65. Петров Б.Н. Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. Труды 1-го международного конгресса ИФАК по автоматическому управлению, М., изд. АН СССР, 1961, т. 1, стр. 159-275.

66. Кухтенко А.И., О теории сложных систем с иерархической структурой управления. Сб. "Сложные системы управления", Киев, Наукова Думка, 1966 г.

67. Кулебакин В.С., Высококачественные инвариантные системы регулирования. Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах, Труды Совещания в г. Киеве 16-20 октября 1958 г., М., АН УССР, 1959 г.

68. Дубошин Г.И. Небесная механика (основные задачи и методы) ФМ, 1963 г.

69. Фуллер, Исследование оптимальных нелинейных систем регулирования, Э.И. Приборы и элементы автоматики, № 37, 1963.

70. Троицкий В.А., Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, вып. 2, 1962.

71. Picone Mauro, Criteri sufficienti per il minimo abcoluto nel vettore minimante. Atti Accad. naz. Lincei.
Mem. Cl. Sei, Fis., mat.e natur. 1961, sez. 1,6.

72. Picone Mauro, Criteri sufficienti in generali problemi di Calcodo della variazioni rignardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a prin componenti. Atti Accad.naz. Lincei, Mem.Cl, Sei. Fis., mat. e natur. 1963, ser. VIII, vol. VII, fas. 3, N3, p. 33-37.

73. Jackson R. and Horn F., On Discrete Analogues Pontryagin's Maximum Principle International J. of Control, First Series, Vob.1,N4, 1965, pp. 389-397.

74. Young L.G., Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calinlus of variations. Comptes Rendus de la Societe des Sciendes et lettes Varsovie. Cl.III. vd.30, pp.212-234 (1937).

75. Kelley H.J., A transformation approach to singular subares in optimal trajectory and control problems. J. Soc. Jnd. App. Math.,2, pp. 234-240 (1964).

76. Johnson C.D., Gibson J,E., Singular Solution in Problems of Optimal Control JEEE Transaction on Automatic control. Vol. AC-8, N1, January, 1963 pp. 4-15.

77. Sobral Manoel Jr., Linear control laws for singular linear systems. "J. Franklin Jnst.," 1964, 278, N5, pp. 313-326.

78. Wonham W.M. and Jonson C.II, Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Perfomance Jndex. J. of Basic Endineering, March, 1964, pp.107--115.

79. Bushaw D.W., Optimal discontinuous forcing tems. Contribution to nonlinear oscillation, Annals of mathematical study,v.41, Princeton, Princeton Unnversity Press, 1958.

80. Smith F.B., Time-optimal control of Higher-Order Systems, JRE Transactions on Automatic Control, v. AC-6, N1, 1961.

81. Reid w., Discontinuous solutions in the nonparametric Problem of Mayer in the Calculus of Variations, Americ. Journal of Mathematies, m. 57, 1937g.

82. Лурье К.А., Задача Майера-Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. Прикл. мат. и механика, №5, т.27 1963 г.

83. Хрусталев М.М., О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты. Автоматика и телемеханика, №4, 1967 г.

84. Хрусталев М.М., О достаточных условия абсолютного минимума ДАН, т.174, №5, 1967г.

85. Болтянский В.Г., Достаточные условия оптимальности и обоснования метода динамического программирования. Извести АН СССР, сер. математическая, т.28, №3, 1964 г.

86. Розенберг С.Г., К вопросу о необходимых и достаточных условиях минимума в вариационных задачах. Дифференциальные уравнения, т.4, №2, 1968.

87. Болонкин А.А., Импульсные решения в задачах оптимального управления. Известия Сиб. отд. АН СССР, сер. техн. наук, №13, вып.3 1968г.

88. Серазетдинов Т.К., К аналитическому конструированию регуляторов в процессах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, т.26, №9, 1965г.

89. Габасов Р., Об оптимальности особых управлений. Дифференциальные уравнения, т.4, №6, 1968.

90. Буякас В.И., Оптимальное управление системы с переменной структурой. АиТ, №4, 1966 г.

91. Иоффе А.Д., Преобразования вариационных задач. Технич. кибернетика №4, 1967г.

92. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Расширения вариационных задач. Тр. Моск. математ. об-ва, т.18, 1968г.

93. Емельянов С.В., Системы автоматического управления с переменной структурой. Наука, 1967г.

94. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Механика космического полета с малой тягой. Наука, 1966г.

95. Бурков В.Н., Ловецкий С.Е.. Методы решения экстремальных задач комбинированного типа (обзор). Автоматика и телемеханика, №11 1968г.

96. Зуховицкий С.Н., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. Наука 1964 г.

97. Черчмен , Введение в исследование операций . ИЛ, 1968г.

98. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейом программировании. Сов. Радио, 1966 г.

99. Гурман В.И. , Метод кратных максимумов и условия относительной оптимальности вырожденных режимов. А и Т, №12, 1967г.

100. Первозванский А.А. , О минимуме максимальнрго отклонения управляемой линейной системы, Изв. АН СССР, МЕХАНИКА, 1965, №2, стр. 51-57.

101. АТАНС М. и Фалб П., Оптимальное управление, Машиностроение, 1968г.

102. Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости движения. МГУ, 1952г.

103. Малкин И.Г. , Теория устойчивости движения, ФМ, 1966г.

104. Эрроу ДЖ., Исследования по линейному и нелинейному програмированию. ИЛ, 1962.

V 105. Болонкин А.А., Специальные экстремали в задачах оптимального управления. Журн. "Техническая кибернетика", №2, 1969г.

V 106. Болонкин А.А., Решение дискретных задач оптимального управления на основе общего принципа минимума. Сб. Вычислительная и прикладная математика. КГУ, выч.7, 1969г.

V **107. Болонкин А.А., Об одном методе решения оптимальных задач, Известия СО АН СССР, вып.2, №8, июнь 1970г.**

108. Болонкин А.А., Об одном подходе к решению оптимальных задач. Сб. Вычислительная и прикладная математика, КГУ, вып.12, 1970г.

109. Болонкин А.А., О решении оптимальных задач. Сб. "Математические вопросы управления производством", вып.3, М., 1971г.

110. Болонкин А.А., Методы решения краевых задач теории оптимального управления. Журнал "Прикладная механика", т.4, вып.6, 1971г.

См. также Приложение к диссертации